AUFGABENGRUPPE A **30.04.2024**

> **Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.**

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$. Notiere auch deinen Lösungsweg (durch Rechnung oder in Worten).

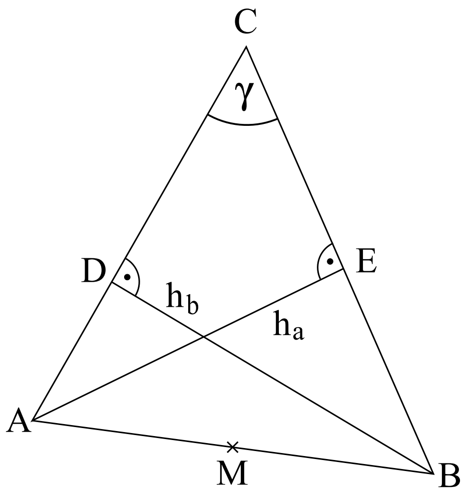
   a) $2x \cdot (2x + 2) = 2024$
      (1) Zeige: -23 ist eine Lösung.
      (2) Finde die zweite Lösung.

   b) $(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \geq 2024$

   c) $(x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) < 2024 \cdot (x + 1)$

   d) $(x^4 + 40x^2 + 400) - 1 \leq 2024$

2. Im nebenstehenden spitzwinkligen Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Die Höhenfußpunkte auf den Seiten $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ seien D und E (siehe nebenstehende Abbildung).

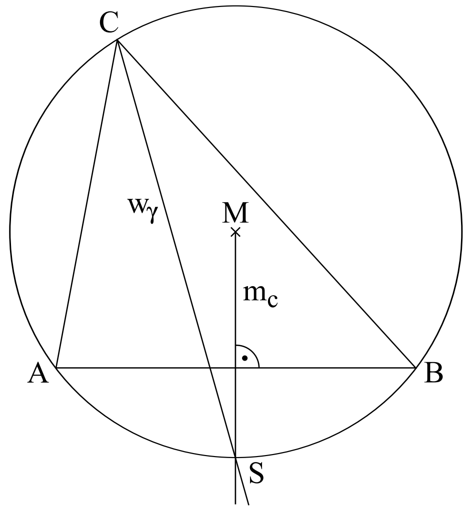


   a) Konstruiere das Dreieck ABC mit $\gamma = 60°$, $h_a = 5{,}0$ cm und $h_b = 6{,}6$ cm.

   b) (1) Begründe, dass gilt: $|MA| = |MD| = |ME| = |MB|$
      (2) Zeige: Wenn $\gamma = 60°$, ist das Dreieck MED gleichseitig.

   c) Bestimme den Winkel $\sphericalangle EMD$, wenn $\gamma = 50°$ ist.

3. Beim nebenstehenden Dreieck ABC schneiden sich die Winkelhalbierende w_γ und die Mittelsenkrechte m_c im Punkt S, dem „Südpol" des Umkreises des Dreiecks ABC.



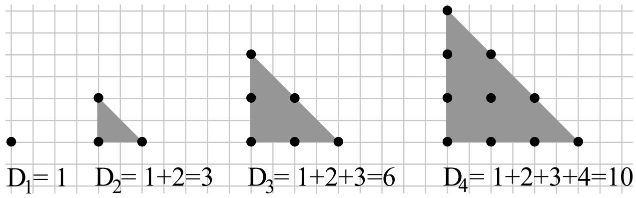
   a) Konstruiere ein solches Dreieck ABC mit dem Umkreisradius $r_u = 5{,}5$ cm, $c = 10$ cm, $\alpha = 74°$. Ergänze die Winkelhalbierende w_γ und die Mittelsenkrechte m_c.

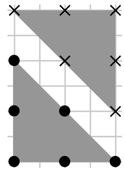
   b) Beweise den Südpolsatz: Bei jedem (nicht-gleichschenkligen) Dreieck liegt S auf dem Umkreis.

   c) Konstruiere den Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC. Beweise: $|SI| = |AS|$.

   d) Es sei nun $\gamma = 90°$ und H der Fußpunkt von h_c (auf c). Zeige: w_γ halbiert auch $\sphericalangle HCM$.

4. Für die Folge D_n der Dreieckszahlen gilt:
$D_1 = 1$ und $D_n = D_{n-1} + n$.
Es ist also $D_2 = 1 + 2 = 3$, $D_3 = 3 + 3 = 6$,
$D_4 = 6 + 4 = 10$ usw.
Die Dreieckszahlen lassen sich als die Anzahl von Punkten innerhalb von rechtwinkligen Dreiecken darstellen (siehe nebenstehende Abbildung).

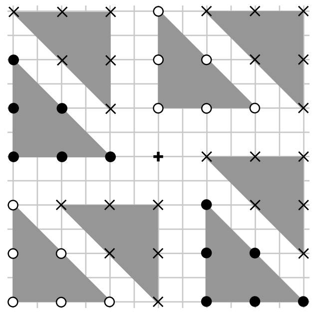




a) Für die Berechnung der n-ten Dreieckszahl gilt folgende Formel:
$D_n = n \cdot (n + 1) : 2$
Erkläre die Formel anhand der nebenstehenden Figur. In der Figur ist $n = 3$.

b) (1) Es gilt: $D_3 + D_4 = 4^2$. Zeichne eine dazu passende Darstellung.
(2) Zeige durch eine Rechnung, dass allgemein gilt: $D_{n-1} + D_n = n^2$.

c) Es gilt: $8 \cdot D_n + 1 = (2n + 1)^2$.



(1) Erkläre die Gültigkeit der Formel anhand der nebenstehenden Figur.

(2) Zeige die allgemeine Gültigkeit der Formel durch eine Rechnung.

d) Es gilt: $3 \cdot D_n + D_{n-1} = D_{2n}$. Zeichne für $n = 4$ eine dazu passende Darstellung.

5. a) Sabine wundert sich, dass ein Drittel der Gummibärchen in ihrer Tüte gelb ist.
Das ist ein Drittel mehr, als sie dachte.
Wie viel Prozent gelber Gummibärchen hatte sie zunächst erwartet?

b) In einer Tüte sind 20 von 120 Gummibärchen gelb. Wie viele nicht-gelbe Gummibärchen muss man mindestens herausnehmen, damit der Anteil der gelben Gummibärchen auf über 30 % steigt?

c) Ein Drittel der 150 Gummibärchen in einer Tüte sind gelb. Martin entnimmt ebenso viele gelbe wie andersfarbige Gummibärchen. Von den verbleibenden Gummibärchen in der Tüte ist dann nur noch jedes Zwölfte gelb. Wie viele Gummibärchen hat Martin entnommen?

d) In einer Tüte mit Gummibärchen sind 35 % der Gummibärchen gelb. Nach dem Herausnehmen von 15 gelben Gummibärchen sind nur noch 20 % gelb. Wie viele Gummibärchen waren zu Beginn in der Tüte?

6. In einer Schatztruhe befinden sich eine bestimmte Anzahl Gold- und Silbertaler.
Jeder Taler zeigt auf beiden Seiten entweder nur den Kopf des Königs oder sein Wappen.
Ein Taler wird zufällig gezogen.

a) Der Anteil der Taler mit Köpfen beträgt 60 %. Von allen Talern mit Köpfen sind 20 % Goldtaler. Von allen Talern mit Wappen sind 50 % Goldtaler.
(1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Silbertaler zu ziehen?
(2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf einem Goldtaler einen Kopf zu sehen?

b) Nun sind gleich viele Gold- und Silbertaler in der Schatztruhe. Von allen Talern sind 45 % Goldtaler mit Köpfen. Von allen Silbertalern sind 40 % Taler mit Wappen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Taler mit Kopf gezogen wird?

c) Die Taler mit Köpfen haben einen Anteil von 90 %, davon sind 10 % Goldtaler. Ersetzt man 4 Silbertaler mit Wappen durch 4 Goldtaler mit Wappen, so sind nicht mehr 20 % der Taler mit Wappen aus Gold, sondern $\frac{1}{3}$. Wie viele Silbertaler mit Köpfen befinden sich in der Schatztruhe?

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

AUFGABENGRUPPE B — **30.04.2024**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.
   (1) $-5 \cdot (3x + 2) = -(2x - 3)$
   (2) $(x + 1) \cdot (2x - 2) \leq 2x^2 + 2x + 2$
   (3) $\frac{2x + 1}{2} > \frac{8}{7}$

   b) Finde alle positiven ganzen Zahlen für x, die die Lösungen der jeweiligen Gleichung sind.
   (1) $2^x = 2x$
   (2) $x^2 = 2x$
   (3) $x^2 = 2^x$

2. a) Konstruiere das folgende Parallelogramm $ABCD$ mit M als Schnittpunkt der Diagonalen e und f: $|AM| = 5{,}5$ cm, $|DM| = 4$ cm, $\sphericalangle DMA = 47°$.

   b) Ein Viereck $ABCD$ besteht aus zwei gleichseitigen Dreiecken mit jeweils der Seitenlänge von 6 cm.
   (1) Konstruiere das Viereck $ABCD$.
   (2) Für welche beiden Vierecke trifft die folgende Behauptung zu: „Die beiden Diagonalen sind gleichzeitig die Winkelhalbierenden der Innenwinkel.“ Notiere die Lösungsbuchstaben auf deinem Reinschriftpapier.

A	B	C	D	E	F
Rechteck	Quadrat	Drachenviereck	Trapez	Parallelogramm	Raute

   c) Ein Parallelogramm $ABCD$ mit der Höhe $h_a = 3$ cm hat einen Umfang $U = 50$ cm. Die Seiten a und b stehen im Verhältnis von 2:3. Berechne den Flächeninhalt.

3. Zur „Mogelpackung“ des Jahres werden jährlich Produkte ernannt, deren Inhalt sich bei gleichem Preis deutlich verringert hat, wobei sich die Verpackungsgröße nicht ändert. Dadurch kommt es zu einer versteckten Preiserhöhung der Produkte.

   a) Auf dem 3. Platz landete im Jahr 2023 ein Unternehmen, welches Mundspülungen verkauft. Seit 2023 befinden sich 500 Milliliter (mℓ) in der Flasche. Der Inhalt wurde im Vergleich zu 2022 um 17 % gesenkt. Wie viel mℓ Mundspülung enthielt eine Flasche im Jahr 2022?
   Runde dein Ergebnis auf ganze mℓ.

   b) Den 2. Platz im Jahr 2023 belegte eine Verpackung mit 270 mℓ Speiseeis. Im Jahr 2022 enthielt diese Verpackung noch 440 mℓ. Wie viel Prozent enthielt die Verpackung von 2022 mehr als die von 2023? Runde auf ganze Prozent.

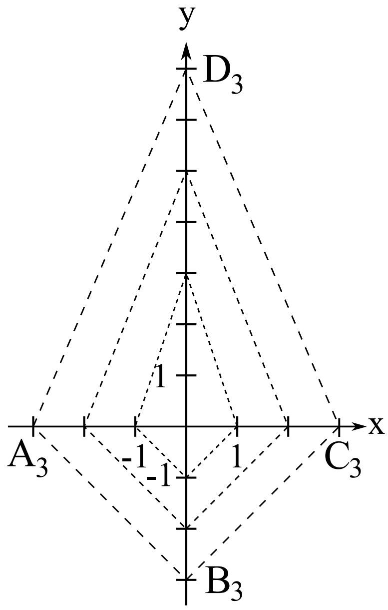
   c) Ein Kekshersteller reduzierte den Packungsinhalt von 250 g auf 150 g und erhöhte den Preis gleichzeitig von 1,40 € auf 1,68 €. Pia behauptet: „Durch diese Veränderungen hat sich der Kilogrammpreis pro Keks verdoppelt.“ Hat Pia recht? Begründe.

   d) Im Jahr 2023 enthielt die Verpackung eines Streichfettes 400 g. Das waren 20 % weniger Inhalt als im Jahr 2022. Gib an, um wieviel Prozent dadurch der Preis für die gleiche Menge an Streichfett steigt.

4. a) Gegeben sind die Punkte $A(-2|0)$, $B(0|-2)$ und $C(2|0)$.

   (1) Gib die Koordinaten von D an, sodass das Drachenviereck $ABCD$ den Flächeninhalt von 26 cm^2 besitzt.

   (2) Verschiebe den Punkt D auf der y-Achse, sodass der Flächeninhalt des neuen Vierecks $ABCD'$ genau 8 cm^2 beträgt. Gib die Koordinaten von D' an.



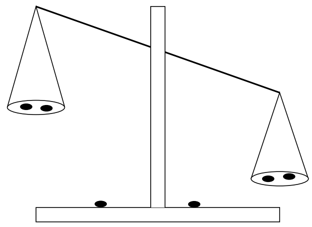
   b) Die Abbildung zeigt die ersten drei Drachen eines Musters, das sich gleichmäßig nach außen fortsetzt.

   (1) Bestimme die Koordinaten von A_7 und D_7.

   (2) Zu welchem Drachen gehört der Punkt $D_n(0|31)$?

   (3) Bestimme den Flächeninhalt von Drachen 3 und Drachen 8.

   (4) Bestimme, welcher Drachen einen Flächeninhalt von 444 cm^2 besitzt.



5. Auf einem Tisch liegt eine bestimmte Anzahl von Münzen, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden lassen. Genau eine dieser Münzen ist leichter als die übrigen, die alle gleich schwer sind. Mit einer Balkenwaage soll mit mehreren Wägungen herausgefunden werden, welche Münze leichter ist als alle anderen.

   a) Wie viele Wägungen benötigt man höchstens, um die leichtere Münze herauszufinden, wenn auf dem Tisch insgesamt (1) 3 Münzen, (2) 7 Münzen, (3) 9 Münzen liegen?

   b) Schreibe auf, wie man vorgehen muss, um mit genau drei Wägungen die leichtere von insgesamt 12 Münzen herauszufinden.

   c) (1) Wie viele Wägungen benötigt man höchstens, um aus 27 Münzen die leichtere Münze herauszufinden?

   (2) Auf einem Tisch liegen 3^n Münzen. Eine Münze ist leichter als die anderen. Bodo stellt fest, dass er nach n Wägungen ganz sicher weiß, welche der Münzen die leichtere ist. Erkläre, wie Bodo vorgeht, wenn $n = 4$ ist.

   (3) Bodo behauptet: „Es ist vollkommen egal, ob auf dem Tisch 1000 oder 2000 Münzen liegen. In beiden Fällen braucht man gleich viele Wägungen, um ganz sicher die eine leichtere Münze herauszufinden.“ Hat er recht? Begründe deine Antwort.

6. Bei einem Kanuverleih am See werden 2er-, 3er- und 4er-Kanus angeboten, in denen man einzeln hintereinander sitzt. Die Freundinnen Alea (A), Babsi (B), Clara (C) und Daisy (D) wollen eine Kanufahrt machen.

   a) Die Freundinnen leihen sich ein 4er-Kanu aus. Wie viele mögliche Sitzreihenfolgen gibt es?

   b) Die Freunde Emir (E) und Felix (F) schließen sich der Kanufahrt an. Von den sechs Freunden fahren jeweils nur 4 mit dem Kanu. Die anderen beiden warten am Strand. Wie viele verschiedene Belegungen aller Jugendlichen in dem 4er-Kanu gibt es, wenn die Sitzreihenfolge

   (1) eine Rolle spielt, (2) keine Rolle spielt?

   c) Damit alle gleichzeitig fahren können, tauschen sie das Kanu gegen zwei gleiche 3er-Kanus aus. Notiere alle möglichen Kombinationen, mit denen ein 3er-Kanu belegt werden kann, wenn

   (1) Emir und Felix im gleichen Kanu sitzen,

   (2) Alea und Daisy nicht im gleichen Kanu sitzen.

   d) Die sechs Freunde tauschen ihre zwei 3er-Kanus gegen drei 2er-Kanus aus. Clara behauptet: „Mega! Jetzt gibt es noch mehr Möglichkeiten, uns auf die Kanus aufzuteilen.“ Hat sie recht? Begründe. (Hinweis: Kombinationen wie Kanu 1 (ABC)/Kanu 2 (DEF) und Kanu 1 (DEF)/Kanu 2 (ABC) sind gleichwertig.)

AUFGABENGRUPPE C **30.04.2024**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

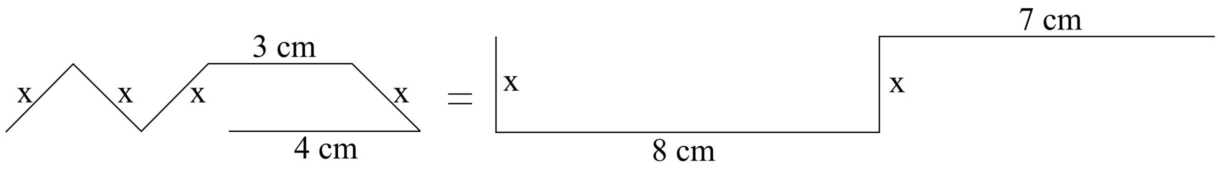
1. a) Berechne x.

   (1) $8{,}7 + 4x - 3{,}2 = 9x + 20{,}5$

   (2) $6 \cdot (5x + 4) = -96$

   (3) $\frac{1}{8}x - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

   b) Die Abbildung zeigt zwei Streckenzüge.



   Bestimme den Wert für x so, dass die zwei Streckenzüge die gleiche Gesamtlänge haben.

2. In einem Löschwasserbecken wird Wasser zum Feuerlöschen gespeichert.
   Dieses Becken hat ein Fassungsvermögen von 1200 m^3 Löschwasser.
   Zum Leerpumpen dieses Beckens stehen mehrere Pumpen gleicher Leistung zur Verfügung.
   Beim Einsatz von zwei dieser Pumpen kann das Becken in 24 Stunden leergepumpt werden.

   a) In einem Tanklöschfahrzeug der Feuerwehr können 3000 Liter Löschwasser transportiert werden. Ein Tanklöschfahrzeug wird immer vollständig befüllt und geleert.
   Wie oft kann das Tanklöschfahrzeug mit dem gesamten Löschwasser des Beckens befüllt werden?

   b) Wie viele dieser Pumpen müssten eingesetzt werden, damit der Teich in 8 Stunden leer ist?

   c) Wie viele Stunden würde das Leerpumpen dauern, wenn nicht zwei, sondern drei dieser Pumpen zum Einsatz kommen würden?

   d) Die Feuerwehr beginnt, das Becken mit zwei Pumpen leer zu pumpen. Nach 12 Stunden wird eine dritte Pumpe mit gleicher Leistung eingesetzt.
   Wie viele Stunden dauert dann insgesamt das Leerpumpen des Beckens?

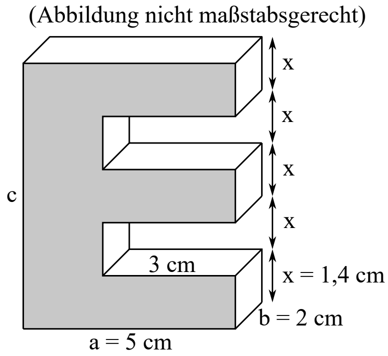
3. Johanna macht eine Ausbildung zur Kfz-Mechatronikerin.

   a) Im ersten Ausbildungsjahr erhält Johanna einen monatlichen Bruttolohn von 880 €.
   Im zweiten Ausbildungsjahr steigt Johannas monatlicher Bruttolohn im Vergleich zum ersten Ausbildungsjahr um 9 % an.
   Berechne, wie viel Euro Johanna im zweiten Ausbildungsjahr als monatlichen Bruttolohn erhält.

   b) Im dritten Ausbildungsjahr erhält Johanna einen monatlichen Bruttolohn von 1100 €.
   Im vierten Ausbildungsjahr erhält sie einen monatlichen Bruttolohn von 1188 €.
   Berechne, um wie viel Prozent Johannas monatlicher Bruttolohn vom dritten zum vierten Ausbildungsjahr gestiegen ist.

   c) Nach der Ausbildung erhält Johanna einen höheren monatlichen Bruttolohn.
   Von ihrem monatlichen Bruttolohn werden Steuern und Versicherungsbeiträge in Höhe von 25 % abgezogen.
   Übrig bleibt nach Abzug dieser Gelder ihr monatlicher Nettolohn in Höhe von 1872 €.
   Berechne, wie viel Euro Johanna als monatlichen Bruttolohn erhält.

4. Aus einem Quader aus Holz mit den Kantenlängen $a = 5$ cm, $b = 2$ cm und c wurden zwei identische kleinere Quader herausgesägt, sodass der abgebildete Körper in Form des Buchstabens E entstanden ist (siehe Abbildung).

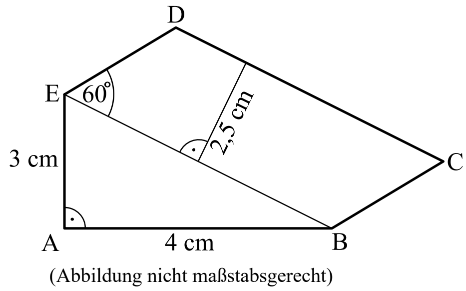


   a) Berechne das Volumen des abgebildeten Körpers.
   Berechne zunächst die Kantenlänge c des Körpers.

   b) Ein anderer Quader hat auch die Kantenlängen $a = 5$ cm und $b = 2$ cm. Die Kantenlänge c ist unbekannt. Das Volumen dieses Quaders beträgt 120 cm^3. Aus diesem Quader werden, wie abgebildet, ebenfalls zwei identische kleinere Quader herausgesägt, sodass ein E entsteht. Berechne die Länge x.

   c) (1) Bestimme die Anzahl der Ecken der grauen (sichtbaren) Fläche des Körpers.
   (2) Mit welchem Faktor muss man diese Anzahl der Ecken multiplizieren, um die Anzahl der Kanten des gesamten Körpers bestimmen zu können?

5. Das abgebildete Fünfeck $ABCDE$ setzt sich aus einem rechtwinkligen Dreieck und einem Parallelogramm zusammen (siehe nebenstehende Abbildung).
Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 12,5 cm^2.



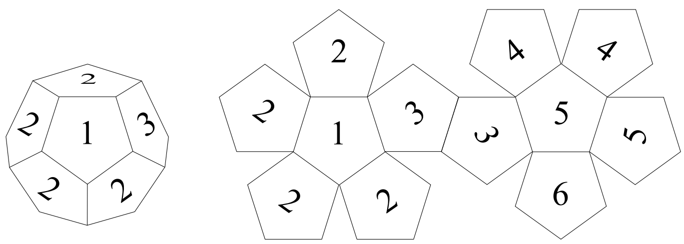
   a) Konstruiere das Fünfeck $ABCDE$ mit den angegebenen Maßen und beschrifte die Eckpunkte.

   b) Berechne den Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$.

   c) Zeige durch Rechnung: $|CD| = 5$ cm.

   d) Alina behauptet: „Die Innenwinkelsumme in diesem Fünfeck beträgt 900°.“ Hat sie recht? Begründe deine Antwort.

6. Die Abbildung zeigt einen 12-seitigen Spielwürfel und sein Netz, beschriftet mit den Zahlen 1 bis 6. Hiranur und Anton spielen mit diesem Würfel.



   a) Mit dem Spielwürfel wird dreimal hintereinander gewürfelt. Die gewürfelten Zahlen werden miteinander multipliziert. Anton hat das Produkt 24 erhalten. Gib alle Möglichkeiten an, die zu diesem Ergebnis führen. Die Reihenfolge der gewürfelten Zahlen spielt keine Rolle.

   b) Mit dem Spielwürfel wird einmal gewürfelt.
   (1) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Zahl „3“ gewürfelt wird.
   (2) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine gerade Zahl gewürfelt wird.
   (3) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nicht die Zahl „2“ gewürfelt wird.
   (4) Gib ein mögliches Ereignis für die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{12}$ an.

   c) Mit dem Spielwürfel wird zweimal gewürfelt. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zuerst die Zahl „1“ und dann die Zahl „4“ gewürfelt wird.

   d) Die Flächen eines anderen 12-seitigen Würfels sind nur mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 beschriftet. Für diesen Würfel gelten die folgenden beiden Bedingungen:
   - Die Anzahl der Flächen mit der Zahl „2“ ist doppelt so groß wie die Anzahl der Flächen mit der Zahl „1“.
   - Die Anzahl der Flächen mit der Zahl „2“ ist halb so groß wie die Anzahl der Flächen mit der Zahl „4“.

   Gib an, wie viele Flächen des Würfels mit der Zahl „3“ beschriftet sind.