Mathematik-Wettbewerb 1973 des Landes Hessen

- Endrunde -

Aufgaben: Hauptschule

1. Schreibe 50 als Summe vier verschiedener, durch 5 teilbarer natürlicher Zahlen mit der folgenden Eigenschaft:

Wenn man von diesen vier Zahlen
die erste um zwei vermehrt,
die zweite um zwei vermindert,
die dritte halbiert und
die vierte verdoppelt,
so soll die Summe ebenfalls wieder 50 sein.

a) Wie heißen die ursprünglichen Zahlen?

b) Bestimme die "neuen Zahlen".

c) Gibt es mehrere Lösungen?
Wenn ja, gib eine weitere an, die den Bedingungen genügt.

2. Lotte besitzt 40 Kugeln, 20 rote und 20 weiße. Von den 40 Kugeln sind 15 größer als die übrigen. Bei den kleineren Kugeln gibt es 7 rote Kugeln mehr als weiße.

Berechne die Anzahl der Kugeln, die

a) groß und rot
b) groß und weiß
c) klein und rot
d) klein und weiß sind.

3. Ein großer Wasserbehälter kann durch drei Pumpen entleert we5den. Die erste Pumpe entleert den Behälter in drei Stunden, die zweite in vier Stunden und die dritte in sechs Stunden.

In welcher Zeit wird der Behälter entleert, wenn

a) die erste und die dritte Pumpe arbeitet?
b) die zweite und dritte Pumpe arbeitet?
c) alle drei Pumpen gleichzeitig arbeiten?

4. Bei einer Wahl wurden insgesamt 28160 gültige Stimmen abgegeben. Partei B erhielt 3417 Stimmen mehr als $33\frac{1}{3}$ % der Stimmen von Partei A und Partei C 1430 Stimmen mehr als 25% der Stimmen von A.

Wieviel Stimmen entfielen auf jede Partei?

5. Von einem Viereck ist bekannt, daß

a) die Winkel α und β gleich groß sind,
b) der Winkel δ dreimal so groß ist wie der Winkel α und
c) die Winkelsumme der Winkel β und γ insgesamt 180° beträgt.

Berechne die vier Winkel.
Um welches Viereck handelt es sich?
Fertige eine Skizze an.

6. Ein Quader ist doppelt so lang wie breit und doppelt so breit wie hoch.

a) Wie lang sind die einzelnen Kanten, wenn die Summe der Kantenlängen insgesamt 336 cm beträgt?
b) Berechne das Volumen des Quaders.
c) Wie groß ist das Volumen eines neuen Quaders, wenn man alle Kanten halbiert? Wie hat sich das Volumen gegenüber dem ursprünglichen Volumen geändert?

Mathematik-Wettbewerb 1973 des Landes Hessen

-Endrunde -

Aufgaben: Realschule

1. Bei einer Wahl wurden insgesamt 28160 gültige Stimmen abgegeben. Partei B erhielt 3417 Stimmen mehr als $33\frac{1}{3}$ % der Stimmen von Partei A und Partei C 1430 Stimmen mehr als 25 % der Stimmen von A.

Wieviel Stimmen erhielten jeweils die einzelnen Parteien?

2. Die Ebene, die einen Körper in zwei spiegelbildlich gleiche Teilkörper zerlegt, heißt "Symmetrieebene".

a) Wieviele Symmetrieebenen hat ein Würfel, die
 α) parallel zu Seitenflächen sind?
 β) nicht parallel zu Seitenflächen sind?

b) Bestimme die Anzahl aller Symmetrieebenen einer quadratischen Säule.

3. Schreibe 50 als Summe vier verschiedener, durch 5 teilbarer natürlicher Zahlen mit der folgenden Eigenschaft:

Wenn man von diesen vier Zahlen die erste um zwei vermehrt, die zweite um zwei vermindert, die dritte halbiert und die vierte verdoppelt, so soll die Summe ebenfalls wieder 50 sein.

a) Wie heißen die ursprünglichen Zahlen?
b) Bestimme die "neuen"Zahlen.
c) Gibt es mehrere Lösungen?
 Wenn ja, gib eine weitere an, die den Bedingungen genügt.

4. Albert (A), Bruno (B), Christian (C) und Dieter (D) stehen im Verdacht, ein Fenster eingeworfen zu haben. Auf die Frage, wer von ihnen der Täter sei, behaupten sowohl A als auch B: "Ich war es nicht."
D sagt:"B war es", und C sagt:"D war es".
Es ist bekannt, daß genau einer der vier Jungen lügt.

a) Zeige, daß A und B nicht gelogen haben.
b) Wer war der Täter?

5. a) Gegeben ist die Menge $A = \{-10; +4\}$

Erweitere die Menge A durch möglichst wenige Zahlen so, daß man in der neuen Menge uneingeschränkt subtrahieren kann.

b) Löse die entsprechende Aufgabe zu a) für die Menge $B = \{12; -4\}$

c) Welche Beziehungen bestehen zwischen den in den Aufgaben a) und b) erhaltenen Mengen?

Hinweis: In einer Menge M uneingeschränkt subtrahieren heißt, daß das Ergebnis einer beliebigen Subtraktionsaufgabe $a-b$, a,b M stets Element von M ist.

6. Ein PKW legt eine Strecke von 140 km in $1\frac{3}{4}$ Stunden zurück. Seine Höchstgeschwindigkeit ist um 40 % größer als seine durchschnittliche Reisegeschwindigkeit für die gesamte Strecke. Er fährt 15 Minuten lang mit Höchstgeschwindigkeit.

a) Berechne die Höchstgeschwindigkeit sowie die mit Höchstgeschwindigkeit durchfahrene Strecke.

b) Bestimme die Durchschnittsgeschwindigkeit für den Rest der Strecke.

Mathematik-Wettbewerb 1973 des Landes Hessen

- Endrunde -

Aufgaben: Gymnasium Klasse 8

1. Schreibe 50 als Summe vier verschiedener, durch 5 teilbarer natürlicher Zahlen mit der folgenden Eigenschaft:

Wenn man von diesen vier Zahlen die erste um zwei vermehrt, die zweite um zwei vermindert, die dritte halbiert und die vierte verdoppelt, so soll die Summe ebenfalls wieder 50 sein.

a) In welche vier Zahlen kann 50 zerlegt werden?
b) Gibt es mehrere Lösungen (Begründung!)?

2. Ein Rechteck mit den Eckpunkten A(3/0), B(6/0), C(6/8), D(3/8) soll in das Rechteck mit den Eckpunkten P(0/0), Q(8/0), R(8/3), S(0/3) gedreht werden.

a) Zeichne die beiden Rechtecke.
b) Um welchen Punkt kannst Du das Rechteck ABCD drehen?
c) Gibt es noch andere Punkte, um die das Rechteck ABCD gedreht werden kann?
d) Zeichne die Bahn des Punktes X(5/6).

3. Albert (A), Bruno (B), Christoph (C) und Dieter (D) stehen im Verdacht ein Fenster eingeworfen zu haben. Auf die Frage, wer von ihnen der Täter sei, behaupten A und B:" Ich war es nicht!"; D sagt: "B war es", und C sagt: " D war es". Es ist bekannt, daß genau einer der vier Jungen lügt.

a) Zeige, daß A und B nicht gelogen haben.
b) Wer war der Täter?

4. Bei einem Schachturnier, bei dem jeder Teilnehmer gegen jeden anderen genau ein Spiel spielte, hatten alle 8 Spieler verschiedene Punktzahlen erzielt.
Dabei erhielt der Sieger einer Partie einen Punkt, der Verlierer keinen Punkt; kein Spiel endete unentschieden.

a) Wieviele Punkte erreichte der beste Spieler?
b) Wie endete die Partie zwischen dem Drittbesten und dem Siebtbesten des Turniers?

5. In der Ebene sind drei Quadrate Q_1, Q_2, Q_3 gezeichnet. Auf Q_1 sind drei verschieden große Würfel der Größe nach zu einem Turm aufgeschichtet. Dieser Turm soll nun auf eines der anderen Quadrate Q_2 oder Q_3 unter Beachtung folgender Regeln umgeschichtet werden:

1. Der Turm soll in der ursprünglichen Anordnung der Würfel wiedererstehen.
2. Es darf bei jedem Umschichtungs-Schritt nur jeweils ein Würfel versetzt werden.
3. Es darf kein größerer Würfel auf einen kleineren gesetzt werden.
4. Bei der Umschichtung dürfen Q_2, Q_3 und auch Q_1 in beliebiger Reihenfolge als Ablageplatz benutzt werden.

a) Wieviele Umschichtungs-Schritte sind mindestens erforderlich, um den Turm auf einem anderen Platz aufzubauen?

b) Kannst Du mit Hilfe der Antwort zu a) herausfinden, wieviele Umschichtungsschritte mindestens nötig sind, um einen Turm von 4 Würfeln vom Quadrat Q_1 auf ein anderes der Quadrate Q_2 bzw. Q_3 umzubauen? Kannst Du ein allgemeines Gesetz für die Mindestzahl der Umschichtungs-Schritte bei einem Turm aus n Würfeln angeben?

c) Prüfe Dein Gesetz am Turm aus 2 Würfeln.

6. Zwei Geraden g_1 und g_2 schneiden sich rechtwinklig im Punkt S. Kennzeichne folgende Punktmengen:

a) die Menge der Punkte, deren Entfernung von S mindestens 3 cm und weniger als 5 cm beträgt.

b) die Menge aller Punkte, deren Abstand von g_1 mehr als 1 cm und von g_2 höchstens 4 cm beträgt.

c) die Menge aller Punkte, deren Abstand von g_1 höchstens so groß ist wie der von g_2.

d) Welche Punktmenge erfüllt die drei Bedingungen zugleich?

(Hinweis: Fertige zu jeder Teilaufgabe eine Zeichnung an und schraffiere darin den Bereich, in dem die Punkte liegen. Randlinien, die zur Punktmenge gehören, sollen durchgezogen, die übrigen gestrichelt werden.)