Mathematik-Wettbewerb 1974 des Landes Hessen
(gem. Erlaß II C 1 – Ed 310/5(1), ABL HKM Nov. 73)
2. Runde: 21. März 1974

Vorbemerkungen zu den Wettbewerbsaufgaben – Gruppe A

Die Aufgaben 1 und 2 sind verbindlich. Von den restlichen 4 Aufgaben sind 2 nach eigener Wahl zu lösen. Im Fall, daß mehr als 2 Wahlaufgaben gelöst wurden, gelten die 2 Aufgaben, bei denen die meisten Punkte erzielt wurden. Die beiden ersten Aufgaben werden auf alle Fälle gewertet. Erreichen mehrere Schüler die gleiche Punktzahl, so wird die Arbeitszeit zur Entscheidung über die Plazierung herangezogen.

PFLICHTAUFGABEN

1. In einer Ebene sind 5 verschiedene Punkte gegeben, von denen jeweils nur zwei auf einer Geraden liegen.
a) Wie viele verschiedene Vierecke gibt es, deren Ecken vier der gegebenen Punkte sind?
b) Wie viele verschiedene Dreiecke gibt es, deren Ecken drei der gegebenen Punkte sind?
c) Wie viele verschiedene Geraden gibt es, die zwei der gegebenen Punkte enthalten?
(Begründe Deine Lösungen!)

2. Welche Zahlen der Menge $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$ kannst Du in nachstehenden Ungleichungen für x und y einsetzen, damit wahre Aussagen entstehen:
a) $x + y < 7$ und zugleich $4 < x \cdot y < 10$
b) $-1 < 3x - y \leqq x$, wenn $y < 8$ ist.
c) $\frac{3x}{y} = 3x \cdot y$
Gib alle Möglichkeiten an!

WAHLAUFGABEN

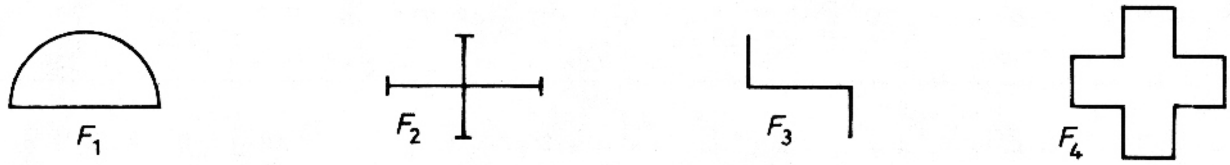
3. Auf einer Geraden sind sechs verschiedene Punkte A, B, C, D, E, F so anzuordnen, daß gilt:
(1) A ist nur einem der Punkte B, C, D, E, F benachbart;
(2) D ist sowohl C als auch F benachbart;
(3) B ist weder A noch E benachbart;
(4) E ist C nicht benachbart.
(Zwei der gegebenen Punkte heißen benachbart, wenn sich zwischen ihnen keiner der anderen vier Punkte befindet.)
Zeichne eine Anordnung der sechs Punkte auf der Geraden.

Aufgaben Gruppe A (Fortsetzung)

WAHLAUFGABEN

4. Für zwei Dreiecke ABC und DEF, die keinen Punkt gemeinsam haben, sollen die Mittelpunkte der Strecken AD, BE, CF jeweils R, S, T heißen.
Zeichne die beiden Dreiecke so, daß gilt:
a) R, S, T sind verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen;
b) R, S, T sind verschiedene Punkte, die auf einer Geraden liegen;
c) $R = T$, aber $R \neq S$
d) $R = S = T$.

5.



a) Stelle die Symmetrie-Eigenschaften der Figuren F_1, F_2, F_3, F_4 fest, und halte Deine Ergebnisse durch Eintragen der Zeichen W (wahr) oder F (falsch) in einer Tabelle folgender Art fest:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
mindestens 1 Symmetrieachse vorhanden					W
mindestens 2 Symmetrieachsen vorhanden					W
mehr als 2 Symmetrieachsen vorhanden					W
ein Zentrum einer Punktspiegelung vorhanden					F

b) Zeichne eine Figur F_5 mit den Symmetrieeigenschaften, wie sie die letzte Spalte der Tabelle angibt.

6. Es sei $M = \{1; 3; 5; 7; \ldots\}$. Für $a, b \in M$ gelte:
$a * b \;=\; a + b - \mathrm{ggT}(a, b)$.
Mit $\mathrm{ggT}(a, b)$ wird der größte gemeinsame Teiler von a und b bezeichnet.

a) Berechne für die in der Tabelle angegebenen Zahlen jeweils $a * b$. Trage Deine Ergebnisse in einer Tabelle ein.

*	1	3	5	7	9
1					
3					
5					

b) Begründe, warum für $a, b \in M$ stets auch $(a * b) \in M$ gilt.
c) Warum gilt für die Verknüpfung: $a * b \;=\; b * a$ (Kommutativgesetz)?

Mathematik-Wettbewerb 1974 des Landes Hessen
(gem. Erlaß II C 1 – Ed 310/5(1), ABL HKM Nov. 73)
2. Runde: 21. März 1974

Vorbemerkungen zu den Wettbewerbsaufgaben – Gruppe B

Die Aufgaben 1 und 2 sind verbindlich. Von den restlichen 4 Aufgaben sind 2 nach eigener Wahl zu lösen. Im Fall, daß mehr als 2 Wahlaufgaben gelöst wurden, gelten die zwei Aufgaben, bei denen die meisten Punkte erzielt wurden. Die beiden ersten Aufgaben werden auf alle Fälle gewertet. Erreichen mehrere Schüler die gleiche Punktzahl, so wird die Arbeitszeit zur Entscheidung über die Plazierung herangezogen.

PFLICHTAUFGABEN

1. Bestimme jeweils die Größe der Winkel α, β, γ, sowie die Lage entsprechender Spiegelachsen für **alle** Dreiecke ABC mit
   a) $\alpha + \beta = 120^\circ$ und $\alpha = \gamma$;
   b) $\beta = 132^\circ$ und genau einer Spiegelachse;
   c) $\gamma = 74^\circ$ und genau einer Spiegelachse.

2. Zwei Kerzen, K_1 und K_2, werden gleichzeitig angezündet. K_1 ist 20 cm lang und K_2 10 cm. K_1 brennt in 2 Stunden herunter, K_2 in 5 Stunden, weil sie dicker als K_1 ist.
   a) Nach wieviel Minuten haben die beiden Kerzen nur noch $\frac{1}{4}$ ihrer ursprünglichen Länge?
   b) Wann haben die Kerzen K_1 und K_2 die gleiche Länge?

WAHLAUFGABEN

3. Das Lager (L) einer Jugendgruppe ist von Aburg (A) 3 km Luftlinie und von Bedorf (B) 4 km Luftlinie entfernt. B liegt 5 km Luftlinie östlich von A, das Lager nördlich der Geraden AB.
   a) Zeichne die Lage von A, B und L maßstabgerecht so, daß 1 cm genau 1 km entspricht. A, B und L sind dabei als Punkte anzugeben.
   b) Bei einem Geländespiel soll ein „Schatz" gesucht werden. Dieser „Schatz" liegt nach Spielanweisung weniger als 2 km vom Lager entfernt.
   Kennzeichne das Gebiet, in dem der Schatz zu suchen ist!
   c) Von B führt ein geradliniger Weg zum Lager. Der Schatz liegt südlich der Geraden BL.
   Kennzeichne dieses Gebiet mit einer Farbe!
   d) Außerdem ist bekannt, daß der Schatz von A weiter entfernt liegt als von B.
   Kennzeichne dieses Gebiet mit einer anderen Farbe!
   e) Umrahme die Fläche, in der der Schatz liegt, wenn alle drei Bedingungen erfüllt sind!

Aufgaben Gruppe B (Fortsetzung)

4. Welche Zahlen der Menge $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$ kannst Du in nachstehenden Aussageformen für x und y einsetzen, so daß wahre Aussagen entstehen:

a) $x + y < 7$, wobei $4 < x \cdot y < 10$ ist;

b) $-1 < 3x - y \leqq x$, wenn $y < 8$ ist;

c) $\frac{3x}{y} = 3x \cdot y$?

Gib alle Möglichkeiten an!

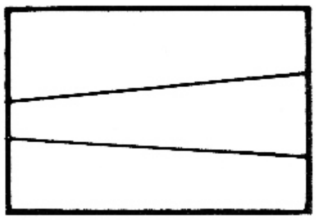
5. Herr A hat ganz bestimmte Gepflogenheiten:

1. Wenn er Kaffee trinkt, nimmt er keine Milch.
2. Er ißt nur dann Brötchen, wenn er Milch trinkt.
3. Er nimmt keine Suppe, wenn er keine Brötchen ißt.

Herr B weiß, daß Herr A heute mittag Kaffee trank. Ist es möglich, daraus zu schließen, ob er heute mittag Suppe nahm?

Die Antwort ist ausführlich zu begründen!

6. a) Gegeben ist ein Rechteck, das durch zwei Geraden in 3 Gebiete zerlegt ist.



1. Zeichne zu den zwei Geraden eine dritte Gerade so, daß
   α) 4 Gebiete
   β) 5 Gebiete entstehen
   γ) Wie viele Gebiete können auf diese Weise höchstens entstehen?
2. Zeichne in das Rechteck zu den beiden ersten gegebenen Geraden eine dritte und vierte Gerade, so daß das Rechteck in die größtmögliche Anzahl von Gebieten zerlegt wird.
   Wie viele Gebiete sind es?

b) Gib an, in wie viele Gebiete man ein Rechteck durch vier **beliebige** Geraden mindestens und höchstens zerlegen kann!

Zu **jeder** Teilaufgabe ist eine Zeichnung anzufertigen!

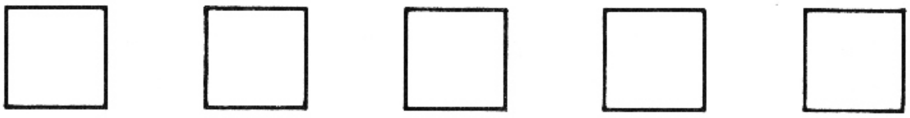
Mathematik-Wettbewerb 1974 des Landes Hessen
(gem. Erlaß II C 1 – Ed 310/5(1), ABL HKM Nov. 73)
2. Runde: 21. März 1974

Vorbemerkungen zu den Wettbewerbsaufgaben – Gruppe C

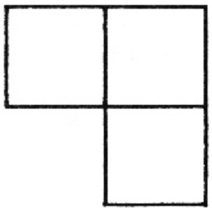
Die Aufgaben 1 und 2 sind verbindlich. Von den restlichen 4 Aufgaben sind 2 nach eigener Wahl zu lösen. Im Fall, daß mehr als 2 Wahlaufgaben gelöst wurden, gelten die 2 Aufgaben, bei denen die meisten Punkte erzielt wurden. Die beiden ersten Aufgaben werden auf alle Fälle gewertet. Erreichen mehrere Schüler die gleiche Punktzahl, so wird die Arbeitszeit zur Entscheidung über die Plazierung herangezogen.

PFLICHTAUFGABEN

1.



Die abgebildeten 5 Quadrate sind so aneinanderzufügen, daß sie mindestens längs einer Seite zusammenhängen, wobei die Seite des einen Quadrates mit der Seite eines anderen Quadrates zusammenfällt.
Z. B. mit 3 Quadraten:



Versuche auf diese Weise 12 verschiedene, nicht deckungsgleiche Figuren darzustellen.
a) Zeichne die Figuren auf!
b) Welche der Figuren ergeben durch Falten der Kanten einen offenen Würfel? Kreuze die entsprechenden Figuren an.

2. Zwei Kerzen K_1 und K_2 werden gleichzeitig angezündet.
Die Länge von K_1 beträgt 20 cm; die Länge von K_2 beträgt 10 cm.
K_1 brennt in 2 Stunden herunter. K_2 ist dicker und brennt daher in 5 Stunden herunter.
a) Nach wieviel Minuten haben die Kerzen nur noch $\frac{1}{4}$ ihrer ursprünglichen Länge?
b) Wann haben die Kerzen K_1 und K_2 die gleiche Länge?

Aufgaben Gruppe C (Fortsetzung)

3. Bei einer Kontrolle der im Rahmen der Lehr- und Lernmittelfreiheit ausgegebenen Bücher wurde festgestellt, daß bei 4 Schülern (Lehmann, Müller, Noll, Reuß) die Rechenbücher vertauscht waren.
   Dieter benutzte das Rechenbuch des Klassenkameraden Noll, der das Rechenbuch von Arno besaß.
   Bernd Reuß hatte das Rechenbuch des Schülers Lehmann, in dessen Schultasche das Buch von Kurt war.
   a) Gib an, wie die Schüler Lehmann, Müller und Noll mit Vornamen heißen!
   b) An wen (Vor- und Zuname) müssen die Schüler Lehmann, Müller und Noll die vertauschten Bücher zurückgeben?

4. Suche alle Zahlenpaare, die die nachfolgenden Aufgaben erfüllen:
   a) $50 < \square \cdot \triangle < 100$
   Welche ganzen Zahlen, die größer als 5 und kleiner als 10 sind, kann man an die Stelle von Quadrat bzw. Dreieck setzen?
   b) $a + b < 100$
   Welche ganzen Zahlen kann man für a bzw. b setzen? Dabei soll man für a nur Zahlen, die größer als 40 und für b nur Zahlen, die größer als 55 sind, nehmen.
   c) $x \cdot x + y \cdot y < 100$
   Welche ganzen Zahlen kann man für x bzw. y setzen? Dabei soll man für x nur Zahlen, die größer als 6 und für y nur Zahlen, die größer als 4 sind, nehmen.

5. Ein Obsthändler kaufte am Donnerstag 120 kg Erdbeeren ein. Die Hälfte der eingekauften Erdbeeren brachte dem Händler am Freitag eine Gesamteinnahme in Höhe von 162,– DM.
   In der Nacht zum Samstag verdarben 8 kg Erdbeeren. Der Händler setzte den Verkaufspreis bedeutend herab und konnte die restlichen Erdbeeren am Samstag für insgesamt DM 109,20 verkaufen.
   Trotz der verdorbenen Erdbeeren erzielte der Händler an der gesamten Sendung einen Gewinn von DM 31,20.
   a) Berechne den Einkaufspreis für 1 kg Erdbeeren!
   b) Wieviel DM erhielt der Händler für 1 kg Erdbeeren am Freitag, am Samstag?
   c) Gib den Gewinn in Prozenten an (bezogen auf den Einkaufspreis)!

6. Von zwei Würfeln sind die Flächen des ersten Würfels mit
   0; 1; 2; 3; 4; 5 und die des zweiten Würfels mit
   0; 1; 2; 6; 7; 8 beschriftet.
   Durch Aneinanderlegen der beiden Würfel kann man zweistellige Zahlen bilden. Die Reihenfolge der Würfel ist beliebig. Die Ziffer 9 erhält man, indem man die Ziffer 6 umdreht.
   a) Schreibe alle zweistelligen Zahlen auf, die man mit den beiden Würfeln *nicht* bilden kann.
   b) Welche der Zahlen von a) sind durch 11 teilbar, welche durch 6 teilbar?
   c) Welche Ziffer müßte man beim ersten Würfel an Stelle der „0“ setzen, so daß möglichst viele Zahlen zusätzlich gebildet werden können? Schreibe diese auf!