MATHEMATIK-WETTBEWERB 1974 DES LANDES HESSEN
3. Runde: 29 Mai 1974

Vorbemerkungen zu den Wettbewerbsaufgaben - GRUPPE A

Die Aufgaben 1 und 2 sind verbindlich. Von den restlichen 4 Aufgaben sind zwei nach eigener Wahl zu lösen. Im fall, daß mehr als zwei Wahlaufgaben gelöst wurden, gelten die 2 Aufgaben, bei denen die meisten Punkte erzielt wurden. Erreichen mehrere Schüler die gleiche Punktzahl, so wird die Arbeitszeit zur Entscheidung über die Plazierung herangezogen.

P F L I C H T A U F G A B E N

1. Löse die folgenden Ungleichungen; Grundmenge sei $N = \{1; 2; 3; \ldots\}$

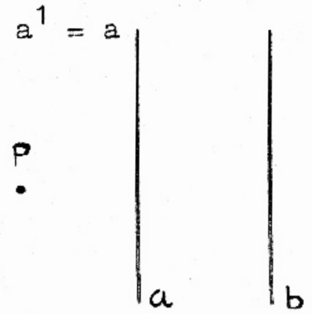
   a. $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 < 100$

   b. $1^x + 2^x + 3^x + 4^x + 5^x < 1000$

   c. $x^1 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \cdot x^5 < 10000$

   d. $1^x \cdot 2^x \cdot 3^x \cdot 4^x \cdot 5^x < 100000$

   HINWEIS: es ist $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren } a}$; $a^1 = a$



Figur 1

2. Gegeben seien der Punkt P sowie die parallelen Geraden a und b (s. Figur 1).

   Mit $P \xrightarrow[a]{} P' \xrightarrow[b]{} P''$

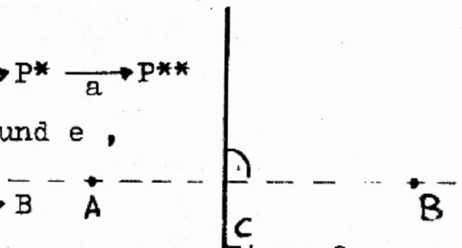
   bezeichnet man die Spiegelung des Punktes P an der Geraden a mit P' als Bildpunkt von P sowie die nachfolgende Spiegelung von P' an der Geraden b mit P'' als Bildpunkt von P'.

   a. Zeichne:

   $P \xrightarrow[a]{} P' \xrightarrow[b]{} P''$ sowie $P \xrightarrow[b]{} P^* \xrightarrow[a]{} P^{**}$

   b. Zeichne gemäß Figur 2 die Geraden d und e, sodaß

   $A \xrightarrow[c]{} A' \xrightarrow[d]{} B$ und $A \xrightarrow[e]{} A^* \xrightarrow[c]{} B$



Figur 2

   c. Gegeben seien 3 Punkte Q, R, und S, die nicht auf einer Geraden liegen. Bestimme die Gerdane g und h so, daß

   $Q \xrightarrow[g]{} R \xrightarrow[h]{} S$

   d. Für 4 verschiedene Punkte T, U, V, W und 2 Spiegelgeraden k und l soll gelten:

   $T \xrightarrow[k]{} U \xrightarrow[l]{} V$ und $T \xrightarrow[l]{} W \xrightarrow[k]{} V$

   Welches Viereck bestimmen die Punkte T, U, V, W ?

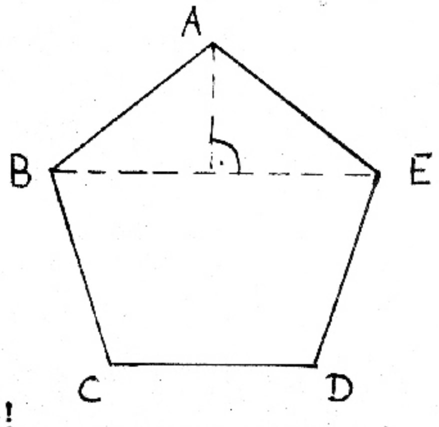
   ZEICHNE !

W A H L A U F G A B E N

AUFGABEN GRUPPE A (Fortsetzung)

3. 50 numerierte Kästen K_1 , K_2 , ... K_{50} stehen in einer Reihe. Ein Junge geht an den Kästen vorbei und wirft Kugeln hinein nach folgender Vorschrift:
beim 1. Vorbeigehen wirft er in jeden Kasten eine Kugel;
beim 2. Vorbeigehen wirft er in K_2 , K_4 , K_6 , ...K_{50} jeweils 1 Kugel;
beim 3. Vorbeigehen wirft er in K_3 , K_6 , K_9 ,...K_{48} jeweils 1 Kugel;
usw.
   a. Welche Kästen enthalten nach 40 Gängen genau 2 Kugeln ?
   b. Welche Kästen enthalten nach 30 Gängen die meisten Kugeln ?
   c. In welchen Kästen kommt durch den 20. Gang, den 21. Gang,... den 50. Gang insgesamt nur noch eine Kugel hinzu ?

4. Für die Eckpunkte des regelmäßigen Fünfecks ABCDE wird folgende Verknüpfung * erklärt:
   a. Je zwei verschiedenen Eckpunkten wird derjenige Eckpunkt zugeordnet, der auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsgeraden der beiden Punkte liegt. (z.B. E*B = A)
   b. Für die Verknüpfung eines Eckpunktes mit sich selbst soll gelten:
   P * P = P für $P \in \{A, B, C, D, E\}$



   1) Stelle die Verknüpfungstafel auf !
   2) Ist die Verknüpfung kommutativ ? (Begründe die Antwort)
   3) Ist die Verknüpfung assoziativ ? (Begründe die Antwort)
   4) Begründe die Gültigkeit von

   $$(P * Q) * P = P * (Q * P)$$

5. In der Menge $\{0 ; 1\}$ wird eine 'Addition' $\oplus$ wie folgt erklärt:
$0 \oplus 0 = 0$; $1 \oplus 0 = 1$; $0 \oplus 1 = 1$; $1 \oplus 1 = 0$.
Ein Zahlendreieck wird mit Hilfe der $\oplus$-Addition nach folgendem Muster aufgebaut:

```
1   0   0   1
  1   0   1
    1   1
      0
```

   a. Ergänze die Zeile 1 0 1 0 1 zu einem Zahlendreieck ;
   b. Bestimme ein Zahlendreieck mit 4 Zeilen, in dem gleich viele Zahlen 0 und 1 vorkommen.
   c. Begründe, daß es kein Zahlendreieck mit 6 Zeilen geben kann, das gleich viele Zahlen 0 und 1 enthält.

6. Ein Schachbrett ist ein Quadrat, das aus 8 mal 8 Feldern besteht.
   a. Wie viele verschiedene Quadrate aus 4 Feldern gibt es auf dem Schachbrett ?
   b. Wie viele verschiedene Quadrate aus 9 Feldern gibt es auf dem Schachbrett?
   c. Wie viele verschiedene Quadrate mit ganzzahliger Felderzahl gibt es insgesamt auf einem Schachbrett?

MATHEMATIK - WETTBEWERB 1974 DES LANDES HESSEN
3. Runde: 29 Mai 1974

Vorbemerkungen zu den Wettbewerbsaufgaben - GRUPPE B

Die Aufgaben 1 und 2 sind verbindlich. Von den restlichen 4 Aufgaben sind zwei nach eigener Wahl zu lösen. Im Fall, daß mehr als zwei Wahlaufgaben gelöst wurden, gelten die 2 Aufgaben, bei denen die meisten Punkte erzielt wurden. Erreichen mehrere Schüler die gleiche Punktzahl, so wird die Arbeitszeit zur Entscheidung über die Plazierung herangezogen.

PFLICHTAUFGABEN

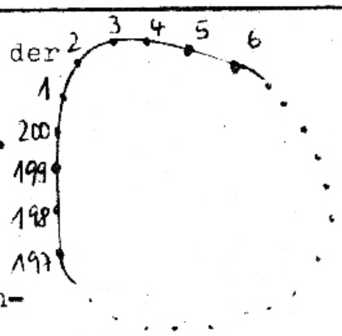
1. Wie können zwei Kreise gezeichnet werden, so daß sie
   a. keinen Punkt gemeinsam haben;
   b. genau einen Punkt gemeinsam haben;
   c. zwei Punkte gemeinsam haben?
   d. Welche Beziehungen bestehen jeweils in den Teilaufgaben a., b. und c. zwischen den Radien der Kreise und der jeweiligen Entfernung ihrer Mittelpunkte?

   ANMERKUNG: Unter einem Kreis versteht man die Menge aller Punkte, die von einem bestimmten Punkt, dem Mittelpunkt, gleichweit entfernt sind.

2. Bei einer Klassenarbeit erzielen von 35 Schülern einige die Note 'sehr gut' , doppelt so viele Schüler die Note 'gut' . Die Note 'befriedigend' erhielten drei Schüler mehr als die Note 'gut'. Elf Schüler bekamen die Note 'ausreichend'; dies war die Note, die am häufigsten vorkam. Keine Arbeit wurde mit 'ungenügend' beurteilt.
   Bestimme den Notenspiegel der Klasse für diese Arbeit!

WAHLAUFGABEN

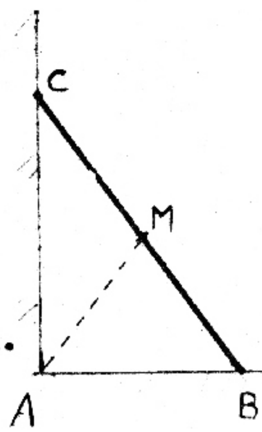
3. Die natürlichen Zahlen von 1 bis 200 werden der Reihe nach in einer geschlossenen Kette aufgeschrieben. Beginnend mit 1 wird jede fünfzehnte Zahl durchgestrichen (1; 16;...). Bei weiteren Umläufen werden auch bereits durchgestrichene Zahlen mitgezählt.
   Welche der folgenden Aussagen sind wahr(w), welche sind falsch (f) ?



   a. Die Zahlen 151; 166; 181 werden durchgestrichen;
   b. es werden nur die Zahlen durchgestrichen, die bei Division durch 15 den Rest 1 oder 11 haben;
   c. die Zahl 5 wird nie durchgestrichen, unabhängig davon, wie oft man umläuft;
   d. diejenigen Zahlen werden durchgestrichen, die bei Division durch 5 den Rest 1 haben;
   e. es bleiben mehr Zahlen stehen als durchgestrichen wurden;
   f. es werden alle Zahlen durchgestrichen sein, wenn man nur oft genug umläuft.

   BEGRÜNDE DEINE ANTWORTEN !

4. Eine schräg an eine Wand gestellte Leiter der Länge l kommt auf dem (waagrechten) Boden ins Rutschen.
   a. Auf welcher Linie bewegt sich der Mittelpunkt der Leiter? - Begründe Deine Antwort!
      HINWEIS: Spiegele das Dreieck ABC an M .
   b. Vergleiche die Fläche des Dreiecks AMC mit der Fläche des Dreiecks ABM.



AUFGABEN GRUPPE B (Fortsetzung)

W A H L A U F G A B E N

5. Ein Geschäftsman gab bisher bei Barzahlung einen Preisnachlaß von 15 %.
Damit mehr Kunden ihre Waren bar bezahlen, will er nun einen Preisnachlaß von 20 % gewähren. Um aber trotzdem dieselben Einnahmen zu erzielen, erhöht er die ursprünglichen Preise.

a. Rechne dazu ein selbstgewähltes Beispiel.

b. Gib die Preiserhöhung in Prozent an!

6. Die Tischtennisspieler Anton (A) , Bernhard (B), Christoph (C) und Dieter (D) tragen eine TT-Meisterschaft aus.

a. Gib die Anzahl der möglichen Plazierungen an!

b. Fritz veranstaltet ein Toto für diesen Wettkampf; der Einsatz für einen Tip beträgt DM 0,50 . es
Es gibt drei Ränge:

1. Rang:	alle Plazierungen richtig	DM 4.--
2. Rang:	nur die beiden ersten Plätze richtig	DM 2.--
3. Rang:	nur der erste Platz ist richtig	DM 1.--

Wieviel DM hat Fritz eingenommen oder verloren, wenn jede Möglichkeit genau einmal getippt wurde ?

MATHEMATIK - WETTBEWERB 1974 DES LANDES HESSEN
3. Runde: 29 Mai 1974

Vorbemerkungen zu den Wettbewerbsaufgaben - GRUPPE C

Die Aufgaben 1 und 2 sind verbindlich. Von den restlichen 4 Aufgaben sind zwei nach eigener Wahl zu lösen. Im Fall, daß mehr als zwei Wahlaufgaben gelöst wurden, gelten die 2 Aufgaben, bei denen die meisten Punkte erzielt wurden. Erreichen mehrere Schüler die gleiche Punktzahl, so wird die Arbeitszeit zur Entscheidung über die Plazierung herangezogen.

PFLICHTAUFGABEN

1. Bei einem gleichseitigen Dreieck ABC wird die Strecke $\overline{BC}$ über C hinaus verlängert. Auf der Verlängerung liegt der Punkt D. Die Strecke $\overline{CD}$ und die Strecke $\overline{BC}$ sind gleichlang.

   a. Zeichne die beschriebene Figur !

   b. Berechne die Maße der Winkel im Dreieck ACD .

   c. Welche der folgenden Behauptungen ist wahr ?
      1) Flächeninhalt ΔACD ist größer als Flächeninhalt ΔABC ;
      2) Flächeninhalt ΔACD ist gleich Flächeninhalt ΔABC ;
      3) Flächeninhalt ΔACD ist kleiner als Flächeninhalt ΔABC ;

   BEGRÜNDE DEINE ANTWORT MIT HILFE EINER SKIZZE !

2. Wie sind die Brüche zu vervollständigen, daß sie in jeder Aufgabe verschiedene Nenner haben ?

a.	$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\ }$	e.	$\frac{2}{3} = \frac{1}{\ } + \frac{1}{\ }$
b.	$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\ }$	f.	$\frac{2}{5} = \frac{1}{\ } + \frac{1}{\ }$
c.	$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{\ }$	g.	$\frac{2}{7} = \frac{1}{\ } + \frac{1}{\ }$
d.	$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{\ }$	h.	$\frac{2}{9} = \frac{1}{\ } + \frac{1}{\ }$

WAHLAUFGABEN

3. Das Schiff 'Undine' fährt in Koblenz um 9.15 Uhr in Richtung Bingen ab, während das Schiff 'Rheingold' zur gleichen Zeit Bingen in Richtung Koblenz verläßt.
   Beide Schiffe treffen sich um 10.55 Uhr.
   Weiterhin ist bekannt, daß
   - die beiden Schiffe unterwegs nicht anhalten;
   - das Schiff 'Undine' 12 km/h bei dieser Fahrt zurücklegt;
   - das Schiff 'Rheingold' um 11.45 Uhr in Koblenz ankommt .

   Berechne:
   a. die Geschwindigkeit des Schiffes 'Rheingold' ;
   b. die Entfernung Bingen - Koblenz ;
   c. die Ankunftszeit des Schiffes 'Undine' in Bingen .

4. Ein Geschäftsmann gab bisher bei Barzahlung einen Preisnachlaß von 15 %. Damit mehr Kunden ihre Waren bar bezahlen, will er nun einen Preisnachlaß von 20 % gewähren. Um aber trotzdem dieselben Einnahmen zu erzielen, erhöht er die ursprünglichen Preise.

   a. Rechne dazu ein selbstgewähltes Beispiel !

   b. Gib die Preiserhöhung in Prozent an !

AUFGABEN GRUPPE C (Fortsetzung)

W A H L A U F G A B E N

5. In der folgenden Additionsaufgabe soll die Bedingung gelten, daß in jeder Spalte die unbekannten Ziffern von oben nach unten eine Aufeinanderfolge von sechs Ziffern bilden.

Zum Beispiel:	1	oder	3	oder auch	7
	2		4		8
	3		5		9
	4		6		0
	5		7		1
	6		8		2

Aufgabe:

```
   • • •
   • • •
   • • •
   • • •
   • • •
 + • • •
 ───────
 2 4 6 9
```

Es gibt mehrere solcher Aufgaben.
Schreibe zwei davon auf.

6. Ein Faß Wein soll in 0,7 - Liter Flaschen abgefüllt werden. Beim Abfüllen in 0,5 - Liter Flaschen kann man 120 Flaschen mehr abfüllen.

a. Wieviel Liter Wein waren im Faß ?
b. Gib die Anzahl der 0,7 - Liter Flaschen an, die für die Abfüllung benötigt wurden !
c. Ein anderes Faß Wein mit demselben Fassungsvermögen soll so abgefüllt werden, daß die Anzahl der 0,7 - Liter Flaschen genau so groß ist wie die Anzahl der 0,5 - Liter Flaschen.
   Wieviel Flaschen von jeder Größe werden benötigt ?