Mathematik-Wettbewerb 1975 des Landes Hessen

Aufgaben der Gruppe A

A

PFLICHTAUFGABEN

1. a) Berechne: $36 - 12 : 4 + 2 \cdot 10$

   b) Suche passende Verknüpfungszeichen aus der Menge $\{+, -, \cdot, :\}$, so daß gilt

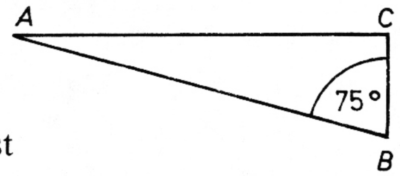
   $$36 - (12 \, \Delta \, 4) \, \square \, 2 - 10 = 10.$$

   c) Finde alle Zahlenpaare $(\Delta \mid \square)$, so daß gilt

   $$33 + \Delta : 12 - \square = 0.$$

   Dabei sollen Δ und $\square$ natürliche Zahlen kleiner als 100 sein.
   Wie viele solcher Zahlenpaare gibt es?

2. a) Zeichne den Bildpunkt D von A bei Spiegelung an der Geraden BC und den Bildpunkt E von B bei Spiegelung an der Geraden AC.



   b) Spiegele den Punkt A an der Geraden DE. Du erhältst den Punkt F.
   Welche Eigenschaften hat das Dreieck AEF?
   Begründe Deine Antwort!

A

WAHLAUFGABEN

3. Die Leitung L eines Sportvereins bildet die folgenden Unterausschüsse:

F	–	Finanzausschuß
G	–	Geräteausschuß
S	–	Spielausschuß
V	–	Vereinsfeste
$\ddot{A}$	–	Ältestenrat

Nach der Klubsatzung gelten folgende Regeln für die Besetzung der Unterausschüsse:

1. Jeder Unterausschuß hat genau 3 Mitglieder;
2. Kein Mitglied aus L darf in mehr als 2 Unterausschüssen mitarbeiten;
3. Mindestens ein Mitglied von V soll in F mitarbeiten;
4. Mindestens ein Mitglied von S soll in G mitarbeiten;
5. Die Mitglieder von $\ddot{A}$ dürfen in keinem anderen Unterausschuß mitarbeiten;
6. Zwei verschiedene Unterausschüsse müssen sich in mindestens einer Person unterscheiden.

a) Zeichne ein Venn-Diagramm!

b) Wie viele Mitglieder kann L höchstens haben, wenn jedes Mitglied von L in mindestens einem Unterausschuß mitarbeitet?

c) Wie viele Mitglieder muß L mindestens haben?

Fortsetzung der Aufgaben der Gruppe A

A

WAHLAUFGABEN

4. Zeichne eine Strecke AB und eine Gerade g.

a) Konstruiere die Bildstrecke $A'B'$ zu AB bezüglich einer Achsenspiegelung an g und zeichne die Strecken AA' und BB'.

b) Wie viele Symmetrieachsen hat die Figur $AA'BB'$ mindestens?

c) Die Anzahl der Symmetrieachsen von $AA'BB'$ hängt von der Lage der Strecke AB bezüglich g ab. Zeichne zu jeder möglichen Anzahl von Symmetrieachsen ein Beispiel.

5. Auf einem TRIMM-DICH-Pfad gelangt man von einem Ausgangspunkt A über eine Brücke B zu dem Punkt C. Zwischen A und B gibt es drei verschiedene Wege, zwischen B und C vier verschiedene Wege.

a) Wie viele verschiedene Wege (Wege, die sich in mindestens einem Teilabschnitt unterscheiden) gibt es für den Hinweg von A nach C?

b) Wie viele Möglichkeiten hat man für den Gesamtweg $A-B-C-B-A$?

c) Durch neue Wege wird der TRIMM-DICH-Pfad erweitert, so daß man für den Weg $A-B-C-B-A$ nun 324 Möglichkeiten hat. Wie viele Wege gibt es nun zwischen A und B sowie zwischen B und C?

d) Wie könnte man ein TRIMM-DICH-Gelände außerdem anlegen, damit sich für einen Weg $A-B-C-B-A$ ebenfalls 324 Möglichkeiten ergeben?

6. Die Lohnerhöhung in den Jahren 1972 und 1973 betrug jedesmal 10 %. Herr Müller hat hierbei im Jahre 1973 monatlich 10,50 DM mehr Lohnerhöhung erhalten als im Jahre 1972.
Wie hoch war der Monatslohn in den Jahren 1971, 1972 sowie 1973?
Wie groß ist der jährliche Mehrverdienst 1972 beziehungsweise 1973 gewesen?

Mathematik-Wettbewerb 1975 des Landes Hessen

Aufgaben der Gruppe B

B

PFLICHTAUFGABEN

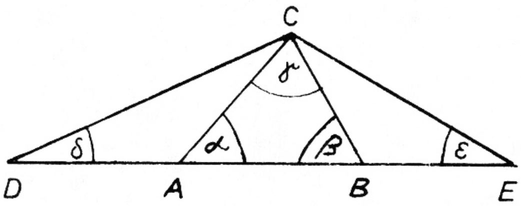
1. Gegeben sind zwei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten.
   Bestimme die Anzahl und beschreibe die Lage der Symmetrieachsen der Gesamtfigur,
   a) wenn beide Radien gleich groß sind;
   b) wenn beide Radien verschieden groß sind.
   c) Untersuche auch den Fall, daß beide Mittelpunkte zusammenfallen!

2. Gegeben sind die Ungleichungen
   α) $2x + 20 > 16.$
   β) $4 - x > 4.$
   a) Bestimme die Lösungsmenge L_1 für α) und L_2 für β) in der Grundmenge $\mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen).
   b) Welche Elemente (Zahlen) haben beide Lösungsmengen gemeinsam?
   c) Welche Elemente haben die beiden Lösungsmengen gemeinsam, wenn man als Grundmenge $\mathbb{N}$ (die Menge der natürlichen Zahlen) wählt?

B

WAHLAUFGABEN

3. In nebenstehender Figur gilt stets
   $\overline{AD} = \overline{AC}$ und $\overline{BE} = \overline{BC}$.
   a) Es seien $\alpha = 36°$ und $\beta = 42°$.
      Berechne die Winkel γ, δ und $\sphericalangle ECB$.
   b) Wie groß müssen die Winkel α und β sein, wenn die Winkel δ und ε je $30°$ betragen sollen?



4. Auf einem TRIMM-DICH-Pfad gelangt man von einem Ausgangspunkt A über eine Brücke B zu dem Punkt C. Zwischen A und B gibt es drei verschiedene Wege, zwischen B und C vier verschiedene Wege.
   a) Wie viele verschiedene Wege (Wege, die sich in mindestens einem Teilabschnitt unterscheiden) gibt es für den Hinweg von A nach C?
   b) Wie viele Möglichkeiten hat man für den Gesamtweg $A-B-C-B-A$?
   c) Durch neue Wege wird der TRIMM-DICH-Pfad erweitert, so daß man für den Weg $A-B-C-B-A$ nun 324 Möglichkeiten hat. Wie viele Wege gibt es nun zwischen A und B sowie zwischen B und C?
   d) Wie könnte man ein TRIMM-DICH-Gelände außerdem anlegen, damit sich für einen Weg $A-B-C-B-A$ ebenfalls 324 Möglichkeiten ergeben?

Fortsetzung der Aufgaben der Gruppe B

B

WAHLAUFGABEN

5. Gegeben sind die Mengen

$M_0 = \{0, 5, 10, \ldots\}$
$M_1 = \{1, 6, 11, \ldots\}$
$M_2 = \{2, 7, 12, \ldots\}$
$M_3 = \{3, 8, 13, \ldots\}$

a) Bestimme die ersten 4 Elemente der Menge M_4!

b) Zu welcher Menge gehören die Zahlen
50; 137; 379 und 1066?

c) Was erhältst Du, wenn Du irgendein Element obiger Mengen zu einem Element einer anderen der gegebenen Mengen addierst?
Gib zwei Beispiele an!

d) Welche natürlichen Zahlen gehören zu keiner der 5 Mengen?

6. a) Berechne: $36 - 12 : 4 + 2 \cdot 10$

b) Suche passende Verknüpfungszeichen aus der Menge $\{+, -, \cdot, :\}$, so daß gilt

$$36 - (12 \triangle 4) \square 2 - 10 = 10.$$

c) Finde alle Zahlenpaare $(\triangle \mid \square)$, so daß gilt

$$33 + \triangle : 12 - \square = 0.$$

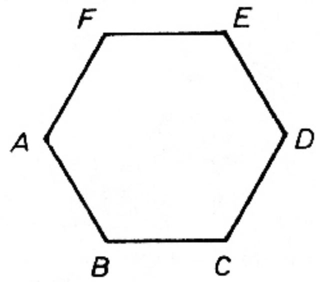
Dabei sollen $\triangle$ und $\square$ natürliche Zahlen kleiner als 100 sein.
Wie viele solcher Zahlenpaare gibt es?

Mathematik-Wettbewerb 1975 des Landes Hessen

Aufgaben der Gruppe C

C

PFLICHTAUFGABEN



1. Ein Sechseck soll von mehreren Geraden nur in Dreiecke zerlegt werden; die Geraden dürfen nur durch die Eckpunkte des Sechsecks gehen.
   a) Zeichne alle Möglichkeiten, die es bei einer Zerlegung mit drei Geraden gibt. Bei allen Lösungen muß eine der Geraden durch die Eckpunkte A und E verlaufen.
   b) Wie viele Geraden sind erforderlich, um die meisten Dreiecke zu erhalten? Zeichne Dir dazu ein regelmäßiges Sechseck!

2. Welche der folgenden Brüche
   $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{15}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{24}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{40}$; $\frac{1}{60}$
   kannst Du an die Stelle der Platzhalter einsetzen?

   Beispiel: $\frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{6}} + \boxed{\frac{1}{12}}$ $\qquad$ $\frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{5}} + \boxed{\frac{1}{20}}$

   Gib auch von den folgenden Aufgaben zwei Lösungen an. Das Vertauschen der Brüche ist nicht zulässig!

$\frac{1}{6} = \boxed{} + \boxed{}$ $\qquad$ $\frac{1}{6} = \boxed{} + \boxed{}$

$\frac{1}{8} = \boxed{} + \boxed{}$ $\qquad$ $\frac{1}{8} = \boxed{} + \boxed{}$

$\frac{1}{10} = \boxed{} + \boxed{}$ $\qquad$ $\frac{1}{10} = \boxed{} + \boxed{}$

Fortsetzung von Aufgaben der Gruppe C

3. Zwischen den natürlichen Zahlen 1 bis 200 gibt es drei Zahlen, die die folgenden Bedingungen zugleich erfüllen:
   Bei Division durch 2 bleibt ein Rest von 1 –
   Bei Division durch 3 bleibt ein Rest von 2 –
   Bei Division durch 4 bleibt ein Rest von 3 –
   Bei Division durch 5 bleibt kein Rest.
   a) Wie heißen die drei Zahlen?
   b) Zwischen 200 und 300 gibt es noch zwei Zahlen, die diese Bedingungen erfüllen. Wie heißen diese Zahlen?

4. Ein Quadrat ($a = 6$ cm) und drei Rechtecke haben jeweils den gleichen Flächeninhalt. Weiter gilt:
   Das erste Rechteck ist doppelt so lang wie die Quadratseite a.
   Das zweite Rechteck ist um die Hälfte länger als die Quadratseite a.
   Das dritte Rechteck ist um ein Drittel länger als die Quadratseite a.
   a) Bestimme die Breite der drei Rechtecke!
   b) Zeichne die drei Rechtecke und gib jeweils deren Umfang an!

5. Auf einem TRIMM-DICH-Pfad gelangt man von einem Ausgangspunkt A über eine Brücke B zu dem Punkt C. Zwischen A und B gibt es drei verschiedene Wege, zwischen B und C vier verschiedene Wege.
   a) Wie viele verschiedene Wege (Wege, die sich in mindestens einem Teilabschnitt unterscheiden) gibt es für den Hinweg von A nach C?
   b) Wie viele Möglichkeiten hat man für den Gesamtweg $A-B-C-B-A$?
   c) Durch neue Wege wird der TRIMM-DICH-Pfad erweitert, so daß man für den Weg $A-B-C-B-A$ nun 324 Möglichkeiten hat. Wie viele Wege gibt es nun zwischen A und B sowie zwischen B und C?
   d) Wie könnte man ein TRIMM-DICH-Gelände außerdem anlegen, damit sich für einen Weg $A-B-C-B-A$ ebenfalls 324 Möglichkeiten ergeben?

6. Ein 2,20 m breiter Bürgersteig wird auf einer Länge von 168 m neu angelegt. Die Kosten betragen pro m^2 27 DM.
   $\frac{3}{8}$ der Kosten übernimmt die Stadt, den anderen Teil müssen die Anlieger entsprechend der Straßenlänge ihres Grundstückes bezahlen.
   a) Berechne die Gesamtkosten!
   b) Gib den Betrag an, den die Stadt übernimmt!
   c) Wieviel muß Herr Baumann bezahlen, dessen Grundstück 28 m lang ist?