Mathematik-Wettbewerb 1975 des Landes Hessen — 2. Runde

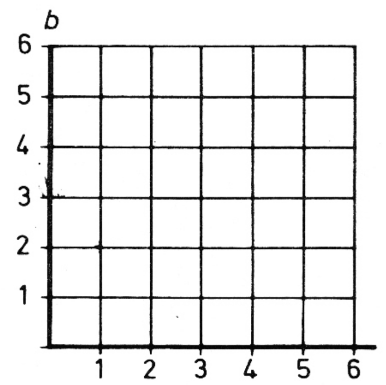
(gem. Erlaß II B 8 – 1005/211 v. 5.9.1974) — 6. 3. 1975

Vorbemerkungen zu den Wettbewerbsaufgaben – Gruppe A

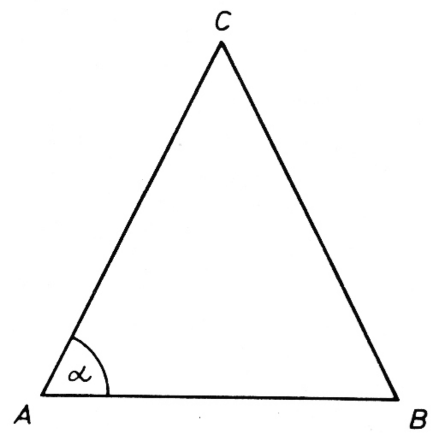
Die Aufgaben 1 und 2 sind verbindlich. Von den restlichen 4 Aufgaben sind 2 nach eigener Wahl zu lösen. Im Fall, daß mehr als 2 Wahlaufgaben gelöst wurden, gelten die 2 Aufgaben, bei denen die meisten Punkte erzielt wurden. Die beiden ersten Aufgaben werden auf alle Fälle gewertet. Erreichen mehrere Schüler die gleiche Punktzahl, so wird die Arbeitszeit zur Entscheidung über die Plazierung herangezogen.

PFLICHTAUFGABEN

1. Für natürliche Zahlen a und b soll die Beziehung $a + 2b < a \cdot b$ gelten.
   a) Gib drei Zahlenpaare (a, b) an, die die Beziehung erfüllen.
   b) Gibt es natürliche Zahlen für a, so daß die Ungleichung nicht erfüllbar ist? Schreibe diese gegebenenfalls auf!
   c) Gibt es natürliche Zahlen für b, so daß die Ungleichung nicht erfüllbar ist? Schreibe diese gegebenenfalls auf!
   d) Markiere in dem nebenstehenden Koordinatensystem die Lösungsmenge der Ungleichung durch Punkte. Beschränke Dich dabei auf $a \leq 6$ und $b \leq 6$.
   e) Wie viele Elemente enthält die Lösungsmenge für $a \leq 10$ und $b \leq 10$?



2. Das gleichschenklige Dreieck A, B, C werde um den Punkt A so gedreht, daß der Bildpunkt C' von C auf der Geraden durch die Punkte A und B links von A liegt. Nenne A' den Bildpunkt von A und B' den Bildpunkt von B. Verbinde B' mit B und nenne den Schnittpunkt von BB' und AC Punkt S.
   a) Zeichne die erhaltene Figur.
   b) Beweise: Dreieck ABB' ist gleichschenklig!
   c) Berechne Winkel $\sphericalangle ASB'$, wenn Winkel $\alpha = 50°$ groß ist. (Gib den Rechenweg an!)
   d) Wie groß ist α zu wählen, damit das Dreieck ABS rechtwinklig ist? Welche Eigenschaft hat dann das Dreieck ABC?



WAHLAUFGABEN

Fortsetzung der Aufgaben der Gruppe A

3. In der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 20\}$ sei die folgende Verknüpfung $\circ$ erklärt:
$a \circ b =$ (Quersumme von a) + (Quersumme von b)
Beispiel: $11 \circ 7 = 2 + 7 = 9$

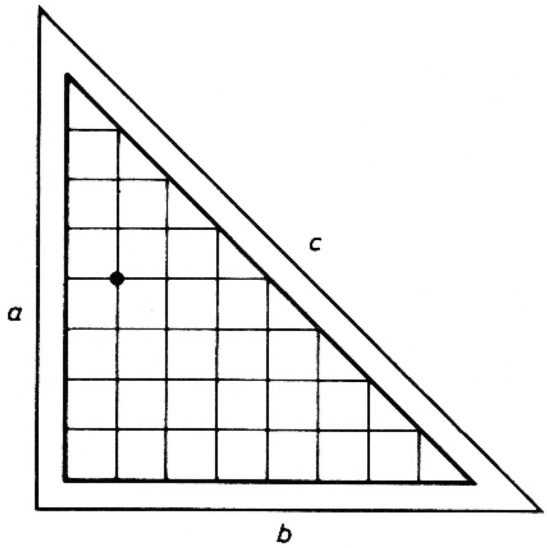
a) Berechne: $5 \circ 12$ und $14 \circ 19$!

b) Wie lautet die größte Zahl, die man bei der Verknüpfung von zwei Elementen aus A erhalten kann?

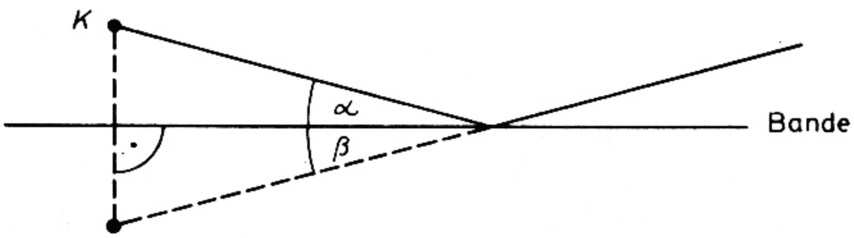
c) Gib alle Lösungen der Gleichung $13 \circ x = 9$; $x \in A$ an.

d) Wie viele Elemente enthält die Lösungsmenge der Gleichung $x \circ y = 10$; $x, y \in A$?
Zeichne die Zahlenpaare als Punkte in der Koordinatenebene!

4. Ein „Billardtisch“ habe die Form eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks. a, b und c seien die Seiten. Die Kugel K liege im Punkt $(1|4)$. Stößt man die Kugel K gegen eine Bande, so läuft diese weiter, als ob sie vom Spiegelpunkt herkomme. Die Winkel α und β sind gleich groß.



z. B.:



a) Zeichne die verschiedenen möglichen Wege, die die Kugel zurücklegt, wenn sie parallel zu je einer der Seiten angestoßen wird.

b) Konstruiere einen Weg der Kugel, so daß diese nach Reflektion an den Banden c, b und a (in dieser Reihenfolge) wieder den Punkt $(1|4)$ durchläuft.

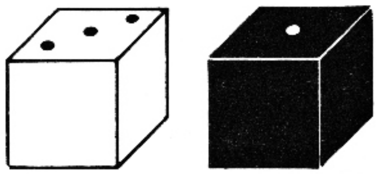
WAHLAUFGABEN

Fortsetzung der Aufgaben der Gruppe A

5. Berti, Franz und Uli spielen Fußball. Dabei fällt ein Eigentor.
Berti sagt: „Franz war es." Franz behauptet: „Berti hat den Ball getreten."
Uli erklärt: „Franz hat gelogen."
a) Wer hat das Tor verursacht, wenn zwei Spieler die Wahrheit sagen und einer lügt?
b) Wer war der Pechvogel, wenn nur ein Spieler die Wahrheit sagt?
Begründe alle Deine Antworten!

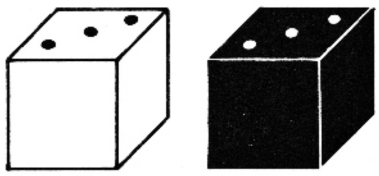
6. Im Land WEITWEG werden die Mathematiknoten der Schüler nach folgendem Verfahren ermittelt:
Der Lehrer würfelt mit 2 Würfeln (schwarz und weiß) und setzt als Arbeitsnote die kleinere der beiden gefallenen Augenzahlen fest.

Beispiel 1:



Note: 1

Beispiel 2:



Note: 3

a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Noten 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zu würfeln?
b) In wieviel Prozent aller Fälle ist die Note 3 zu erwarten?
c) Es wurde festgelegt, daß alle Klassenarbeiten folgende prozentuale Notenverteilung haben sollen:

Note	1	2	3	4	5	6
%	0	$\frac{11}{36} \cdot 100$	$\frac{9}{36} \cdot 100$	$\frac{7}{36} \cdot 100$	$\frac{5}{36} \cdot 100$	$\frac{4}{36} \cdot 100$

Welche Augenzahl muß nun auf jedem der beiden Würfel nicht mehr vorkommen, welche muß doppelt vorkommen?
d) Wie hätte man das Verfahren der Notengebung ändern können, um mit den alten Würfeln die folgende prozentuale Notenverteilung zu erhalten?

Note	1	2	3	4	5	6
%	$\frac{1}{36} \cdot 100$	$\frac{3}{36} \cdot 100$	$\frac{5}{36} \cdot 100$	$\frac{7}{36} \cdot 100$	$\frac{9}{36} \cdot 100$	$\frac{11}{36} \cdot 100$

Mathematik-Wettbewerb 1975 des Landes Hessen 2. Runde
(gem. Erlaß II B 8 – 1005/211 v. 5.9.1974) 6. 3. 1975

Vorbemerkungen zu den Wettbewerbsaufgaben – Gruppe B

Die Aufgaben 1 und 2 sind verbindlich. Von den restlichen 4 Aufgaben sind 2 nach eigener Wahl zu lösen. Im Fall, daß mehr als 2 Wahlaufgaben gelöst wurden, gelten die zwei Aufgaben, bei denen die meisten Punkte erzielt wurden. Die beiden ersten Aufgaben werden auf alle Fälle gewertet. Erreichen mehrere Schüler die gleiche Punktzahl, so wird die Arbeitszeit zur Entscheidung über die Plazierung herangezogen.

PFLICHTAUFGABEN

1. a) Bestimme alle Zahlen kleiner als 100, die sich in genau drei verschiedene Primfaktoren zerlegen lassen.
   b) Warum gibt es keine Zahl kleiner als 100, die man in vier verschiedene Primfaktoren zerlegen kann?
   c) Wieviel Zahlen kleiner als 50 lassen sich als Produkt von drei Primzahlen schreiben, wenn auch gleiche Primfaktoren zugelassen sind?
   BEACHTE: 1 ist keine Primzahl!
2. Für zwei Kreise K_1 und K_2 gilt stets:
   M_1 und M_2 sind ihre Mittelpunkte, ihre Radien r_1 und r_2, wobei $r_1 > r_2$.
   a) Zeichne K_1 und K_2 in einer solchen Lage zueinander, daß genau vier gemeinsame Berührungskreise entstehen, deren Mittelpunkte auf der Geraden M_1M_2 liegen, und von denen je zwei gleich groß sind.
   b) Wie groß sind die Radien dieser Berührungskreise (in bezug auf r_1 und r_2)?
   c) Zeichne K_1 und K_2 in einer solchen Lage zueinander, daß es unendlich viele gemeinsame Berührungskreise gibt, deren Mittelpunkte auf der Geraden M_1M_2 liegen, und von denen genau drei den gleichen Radius $r_3 = r_1 + r_2$ haben.

WAHLAUFGABEN

3. Aus den Ziffern 1, 3, 5, 6 werden vierstellige Zahlen gebildet, so daß keine Ziffer mehrfach erscheint.
   a) Wie viele verschiedene Zahlen können gebildet werden?
   b) Wie viele dieser Zahlen sind teilbar durch 1) 3; 2) 4; 3) 8; 4) 9?
4. Bei einem Probealarm ertönen zur gleichen Zeit an den Punkten A, B und C Sirenen. Wo können Personen stehen, damit sie
   a) die Sirenen von A und B gleichzeitig hören?
   b) die Sirenen von A, B und C gleichzeitig hören?
   c) zuerst die Sirene von A, danach die von B und zuletzt die Sirene von C hören?
   d) die Sirenen von B und C gleichzeitig hören und danach die von A?

WAHLAUFGABEN

Fortsetzung der Aufgaben der Gruppe B

5. In der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 20\}$ sei die folgende Verknüpfung $\circ$ erklärt:
$a \circ b =$ (Quersumme von a) + (Quersumme von b)
Beispiel: $11 \circ 7 = 2 + 7 = 9$

a) Berechne: $5 \circ 12$ und $14 \circ 19$!

b) Wie lautet die größte Zahl, die man bei der Verknüpfung von zwei Elementen aus A erhalten kann?

c) Gib alle Lösungen der Gleichung $13 \circ x = 9$; $x \in A$ an.

d) Wie viele Elemente enthält die Lösungsmenge der Gleichung $x \circ y = 10$; $x, y \in A$?
Zeichne die Zahlenpaare als Punkte in der Koordinatenebene!

6. Ein Weinhändler hinterließ seinen drei Söhnen 36 gleich große Fässer, von denen 9 Fässer voll, 15 Fässer halbvoll und 12 Fässer leer waren.
Im Testament war festgelegt, daß jeder Sohn die gleiche Menge Wein und die gleiche Anzahl Fässer enthält mit der Bedingung, daß der Wein nicht umgefüllt werden darf.
Beispiel, falls 45 gleich große Fässer zu verteilen wären:

1. Fall	volle Fässer	halb-volle Fässer	leere Fässer
1. Sohn	6	3	6
2. Sohn	5	5	5
3. Sohn	4	7	4

2. Fall	volle Fässer	halb-volle Fässer	leere Fässer
1. Sohn	5	5	5
2. Sohn	4	7	4
3. Sohn	6	3	6

Beide Beispiele gelten als eine Lösung, da im 2. Fall nur eine Vertauschung stattfand.
Gib nun für die 36 Fässer vier mögliche Aufteilungen an!

Mathematik-Wettbewerb 1975 des Landes Hessen

2. Runde
6. 3. 1975

Vorbemerkungen zu den Wettbewerbsaufgaben – Gruppe C

Die Aufgaben 1 und 2 sind verbindlich. Von den restlichen 4 Aufgaben sind 2 nach eigener Wahl zu lösen. Im Fall, daß mehr als 2 Wahlaufgaben gelöst wurden, gelten die 2 Aufgaben, bei denen die meisten Punkte erzielt wurden. Die beiden ersten Aufgaben werden auf alle Fälle gewertet. Erreichen mehrere Schüler die gleiche Punktzahl, so wird die Arbeitszeit zur Entscheidung über die Plazierung herangezogen.

PFLICHTAUFGABEN

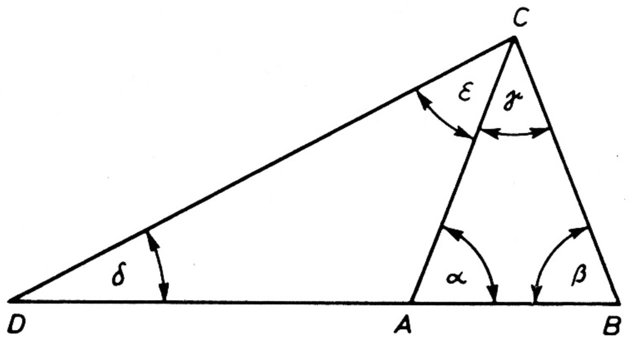
1. Die Oberfläche eines Würfels ist viermal so groß wie die eines anderen Würfels. Die Oberfläche des größeren Würfels beträgt 384 cm^2.
 a) Berechne das Volumen der beiden Würfel in cm^3!
 b) Wie viele der kleineren Würfel passen in den größeren Würfel?

2. a) Stelle die Zahl 112 als Summe von zwei natürlichen Zahlen dar. Die eine Zahl soll durch 4 und die andere Zahl soll durch 5 teilbar sein.
 Es gibt fünf verschiedene Möglichkeiten. Schreibe sie auf!
 b) Schreibe die Zahl 112 als Summe von zwei natürlichen Zahlen. Die eine Zahl soll durch 7 und die andere Zahl soll durch 5 teilbar sein. Gib alle Lösungen an!
 c) Nenne die beiden Teiler, für die $27 + 85 = 112$
 $72 + 40 = 112$
 die einzig möglichen Summen sind! Begründe Deine Antwort!

WAHLAUFGABEN

3. Von den 60 Mitgliedern einer Jugendgruppe spielen 65 % Tischtennis. Weiterhin ist bekannt, daß 40 % der Mitglieder Mädchen sind und $33\frac{1}{3}$ % der Jungen nicht Tischtennis spielen.
 a) Wieviel Mitglieder spielen Tischtennis?
 b) Wieviel Jungen, wieviel Mädchen spielen Tischtennis?
 Bei einer anderen Jugendgruppe – mit gleicher prozentualer Zusammensetzung – spielen 20 Mädchen Tischtennis.
 c) Aus wieviel Mitgliedern besteht diese Jugendgruppe?
 d) Wieviel Mitglieder spielen in dieser Jugendgruppe nicht Tischtennis?

4. Für die folgenden Aufgaben gilt:
 Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind gleich lang. Die Winkel γ und ε sind gleich groß.
 a) Berechne die Größe der Winkel γ und δ, wenn der Winkel $\alpha = 67^\circ$ groß ist!
 b) Berechne die Größe der Winkel α und δ, wenn der Winkel α viermal so groß ist wie der Winkel γ!

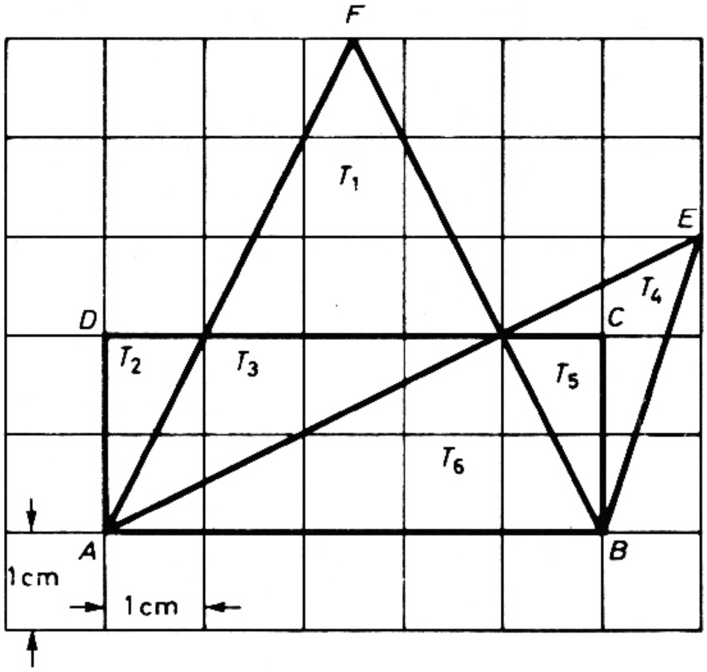


WAHLAUFGABEN

Fortsetzung der Aufgaben der Gruppe C

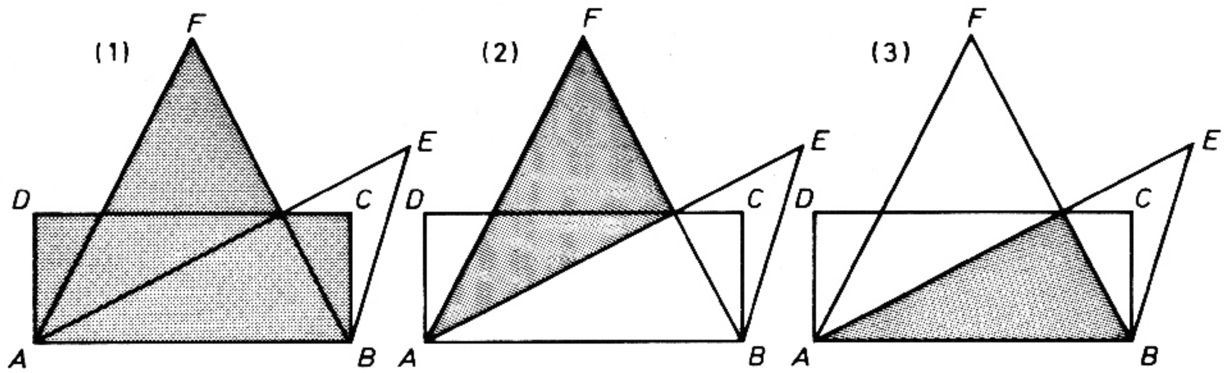
c) Berechne die Größe der Winkel α und γ, wenn die Winkel γ und δ gleich groß sind!

5. Gegeben sind:
die Rechtecksfläche $ABCD$ mit der Punktmenge M_1
die Dreiecksfläche ABE mit der Punktmenge M_2
die Dreiecksfläche ABF mit der Punktmenge M_3
entsprechend nebenstehender Skizze.



a) Bestimme die Flächeninhalte der Teilflächen T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 und T_6 in cm^2!

b) Beschreibe die schraffierten Figuren durch Verknüpfung der Punktmengen M_1, M_2, M_3 und verwende die Verknüpfungen:
$\cup$ (vereinigt mit); $\cap$ (geschnitten mit); $\setminus$ (ohne; gerestet mit)



6. Ein Weinhändler hinterließ seinen drei Söhnen 36 gleich große Fässer, von denen 9 Fässer voll, 15 Fässer halbvoll und 12 Fässer leer waren.
Im Testament war festgelegt, daß jeder Sohn die gleiche Menge Wein und die gleiche Anzahl Fässer erhält mit der Bedingung, daß der Wein nicht umgefüllt werden darf.
Beispiel, falls 45 gleich große Fässer zu verteilen wären:

1. Fall	volle Fässer	halbvolle Fässer	leere Fässer
1. Sohn	6	3	6
2. Sohn	5	5	5
3. Sohn	4	7	4

2. Fall	volle Fässer	halbvolle Fässer	leere Fässer
1. Sohn	5	5	5
2. Sohn	4	7	4
3. Sohn	6	3	6

Beide Beispiele gelten als eine Lösung, da im 2. Fall nur eine Vertauschung stattfand.
Gib nun für die 36 Fässer vier mögliche Aufteilungen an!