Mathematik–Wettbewerb 1976 des Landes Hessen

Aufgaben der Gruppe A

PFLICHTAUFGABEN

1. Die Kehrzahl zu einer rationalen Zahl a ist $\frac{1}{a}$.

   Beispiele: Kehrzahl zu 5 ist $\frac{1}{5}$;

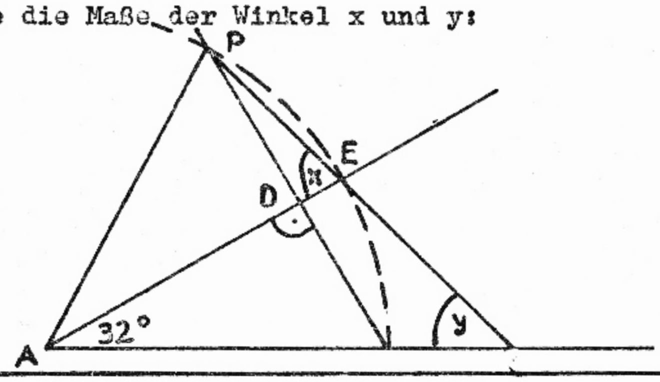
   Kehrzahl zu $-\frac{1}{6}$ ist -6 .

   a) Welche positiven rationalen Zahlen sind kleiner als ihre Kehrzahlen ?

   b) Welche rationalen Zahlen sind genauso groß wie ihre Kehrzahlen ?

   c) Welche rationalen Zahlen sind mindestens so groß wie ihre Kehrzahlen ?

2. Berechne die Maße der Winkel x und y:



3. Bei der von L. Braille im 19. Jahrhundert erfundenen Blindenschrift wird jeder Buchstabe (oder Ziffer) auf einem Raster aus 6 Punkten dargestellt. Jeder dieser 6 Punkte kann erhaben sein oder nicht. Dadurch werden die einzelnen Zeichen ertastbar.

   z.B. P  oder S 

   a) Wie viele verschiedene Zeichen kann man mit genau zwei erhabenen Punkten darstellen ?

   b) Wie viele verschiedene Zeichen kann man mit genau drei erhabenen Punkten darstellen ?

   c) Wie viele verschiedene Zeichen sind überhaupt möglich ?

WAHLAUFGABEN

4. Für rationale Zahlen a und b sei die folgende Rechenvorschrift $\circ$ erklärt:

   $$a \circ b = \frac{a-1}{b+1}$$

   Beispiel: $2 \circ 4 = \frac{2-1}{4+1} = \frac{1}{5}$ $\qquad \frac{1}{3} \circ 5 = \frac{\frac{1}{3} - 1}{5+1} = \frac{-\frac{2}{3}}{6} = -4$

   a) Wie ist a zu wählen, damit $a \circ 5 = \frac{2}{3}$ gilt ?

   b) Für welche Zahlenpaare (a, b) ist $a \circ b$ keine Zahl ?

   c) Gib die Lösungen der Gleichung $a \circ b = 0$ an .

   d) Zeige, daß für $b = -\frac{1}{a}$, $a \neq 1 ; 0$ gilt: $a \circ b = a$.

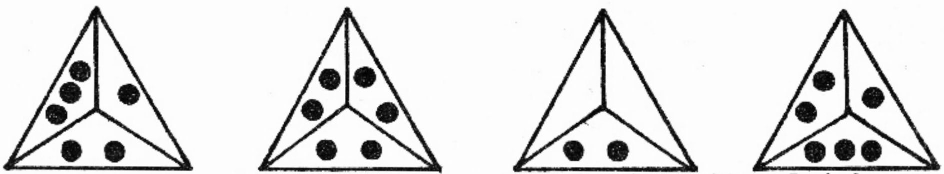
3. Runde - 13. Mai 1976

WAHLAUFGABEN

5. a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 6 cm. Wähle einen Punkt P auf der Seite AB und beweise, daß die Summe der Abstände von P zu den Seiten AC und BC für alle Punkte P auf AB gleich ist. Schreibe alle Beweisschritte auf! (Hinweis: Führe eine Geradenspiegelung durch !)

   b) Für einen Punkt Q im Innern des Dreiecks ABC gilt ein entsprechender Satz. Zeichne eine geeignete Parallele und begründe den Satz.

6. Trimino-Steine haben die Form gleichseitiger Dreiecke, die in jeweils drei Felder aufgeteilt sind. Jedes Feld kann bis zu drei "Augen" enthalten. Alle Steine sind verschieden.
z.B.: Es sind 4 verschiedene Steine abgebildet:



   a) Wie viele Steine haben auf allen drei Feldern die gleiche Augenzahl ?

   b) Wie viele Steine haben nur auf je zwei Feldern die gleiche Augenzahl ?

   c) Worin unterscheidet sich der erste von dem letzten der vier abgebildeten Steine ? Wie viele Steine haben auf allen drei Feldern unterschiedliche Augenzahlen ?
   Wie viele verschiedene Steine gibt es überhaupt ?

7. Bei einem Mannschaftsturnier werden die Mannschaft A und zwei andere Mannschaften in je eine Gruppe gesetzt. Die restlichen 9 Mannschaften verteilt man durch Losen auf die gleich großen Gruppen. Dabei gibt es sechs Gegner, die als leicht gelten; zwei Gegner sind etwa gleichwertig, die letzte Mannschaft ist der Angstgegner von A.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß A in der Gruppe nur leichte Gegner erhält ?

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß A in der Vorrunde auf den Angstgegner trifft ?

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß A in der Vorrunde einen der leichten Gegner, einen der beiden gleichwertigen Gegner und den Angstgegner erhält ?

Mathematik–Wettbewerb 1976 des Landes Hessen

Aufgaben der Gruppe B

1. Gegeben ist der Term $T = a^2 - a + 41$

   a) Bestimme jeweils den Wert des Terms, wenn für a nacheinander die Zahlen +25 und -12 eingesetzt werden!

   b) Welche natürliche Zahl muß für a eingesetzt werden, damit der Wert des Terms 131 beträgt ? (Gib den Lösungsweg an.)

   c) Durch Einsetzen einer negativen ganzen Zahl erhältst Du ebenfalls den Termwert 131. Wie heißt die Zahl ?

   d) Wenn man für a einstellige natürliche Zahlen einsetzt, ist der Termwert stets eine Primzahl. Außerdem gibt es auch zweistellige Zahlen, deren Einsetzung in den Term wieder zu einer Primzahl führt.
   Welche zweistellige natürliche Zahl muß man für a einsetzen, damit der Termwert T keine Primzahl, sondern eine Quadratzahl ist ?

2. \- Siehe Gitternetz auf beigefügtem Blatt ! -

   a) Drehe das Dreieck ABC um den Punkt G um 180°, danach das Bilddreieck A'B'C' um den Punkt H um 180°. Benenne die entsprechenden Bildpunkte mit A", B" und C" .

   b) Die Drehungen um G und H sollen durch zwei Achsenspiegelungen ersetzt werden. Die eine Spiegelachse ist die Gerade B'C'.
   Zeichne die 2. Spiegelachse ein !

   c) Durch eine andere Abbildung wird C auf G und B auf H abgebildet.
   Um welche Abbildung (Verschiebung, Drehung, Spiegelung) handelt es sich ?
   Zeichne gegebenenfalls Verschiebungspfeil, Drehzentrum oder Spiegelachse ein.

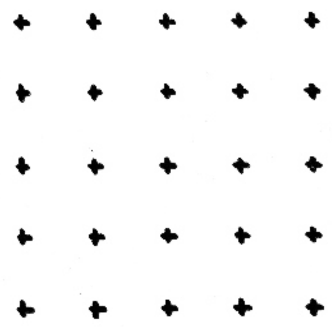
---

3. Gegeben ist ein Quadratgitter mit 25 Gitterpunkten.

   a) Wie viele Geraden gibt es, auf denen jeweils 5 Punkte liegen ?

   b) Wie viele Geraden gibt es, die durch genau 3 Punkte gehen ?
   (Prüfe sorgfältig alle Möglichkeiten!)

   c) Zeichne in das Gitternetz solche Quadrate ein, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind und die verschieden groß sind.
   Wie viele solcher verschieden großer Quadrate gibt es ?



3. Runde - 13. 5. 1976

WAHLAUFGABEN

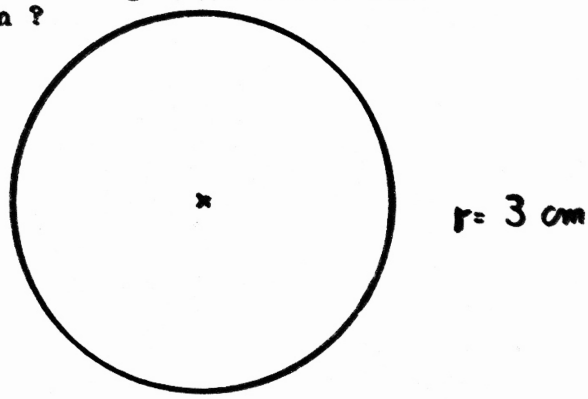
4. Fritz und Hans würfeln mit einem roten, einem gelben und einem blauen Würfel. Die Augenzahl auf dem roten Würfel gibt die Hunderter an, die Augenzahl auf dem gelben Würfel die Zehner und die Augenzahl auf dem blauen Würfel die Einer.

   a) Wie viele verschiedene dreistellige Zahlen können gewürfelt werden, wenn alle drei Würfel gleichzeitig geworfen werden ?

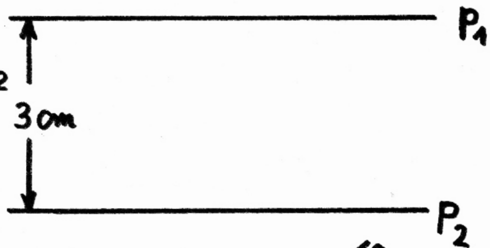
   b) Fritz hat mit den drei Würfeln eine Zahl erhalten, die die Quersumme 7 hat. Welche Zahl kann das sein ? Gib alle Möglichkeiten an !

   c) Fritz und Hans haben je einmal mit den 3 Würfeln gewürfelt. Die Differenz der erhaltenen Zahlen beträgt 547. Welche Zahlen können Fritz und Hans gewürfelt haben ?

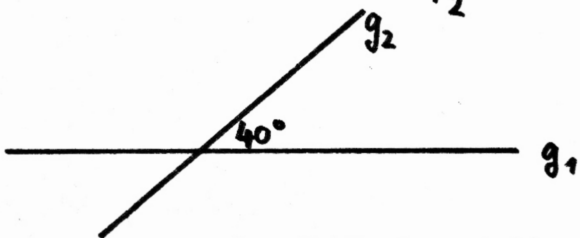
5. a) Schraffiere die Menge aller Punkte, die vom Mittelpunkt M weiter entfernt sind als ihr Abstand von der Kreislinie K beträgt !



   b) Markiere die Menge aller Punkte, deren Abstand von P_2 doppelt so groß ist wie deren Abstand von P_1 !



   c) Schraffiere die Menge aller Punkte, die von g_1 einen größeren Abstand haben als von g_2 !



6. Das Zeichen [ ] ordnet jeder positiven rationalen Zahl eine nicht negative ganze Zahl folgendermaßen zu:

   Ist x eine natürliche Zahl, dann gilt $[x] = x$.

   Ist x eine Bruchzahl, dann ist $[x]$ die nächstkleinere natürliche Zahl.

   Beispiele: $[9] = 9$; $[3\frac{2}{7}] = 3$; $[100{,}98] = 100$

Bestimme jeweils die Lösungsmenge in der Menge der positiven rationalen Zahlen ($G = Q^+$)

a) $x + [x] = 2{,}6$ b) $[x - 2] = 70$

c) $x - [x] = \frac{1}{2}$

7. Jeder geradlinige Schnitt durch einen Körper heißt Ebenenschnitt (schraffierte Fläche in Abb. 1).

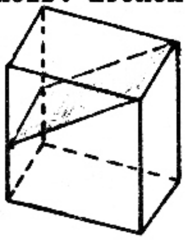
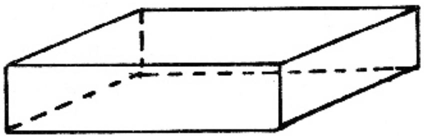


Abb. 1

a) Zerlege den nebenstehenden Quader (Abb.2) durch einen Ebenenschnitt in 2 gleichgroße Quader. Wieviel verschiedene Ebenenschnitte sind möglich ?



b) Das Quadernetz (Abb.3) gehört zum nebenstehenden Quader (Abb. 4). Zeichne die Schnittlinien des Ebenenschnittes (Abb. 3) in das Quadernetz ein. Benutze dazu das Lösungsblatt !

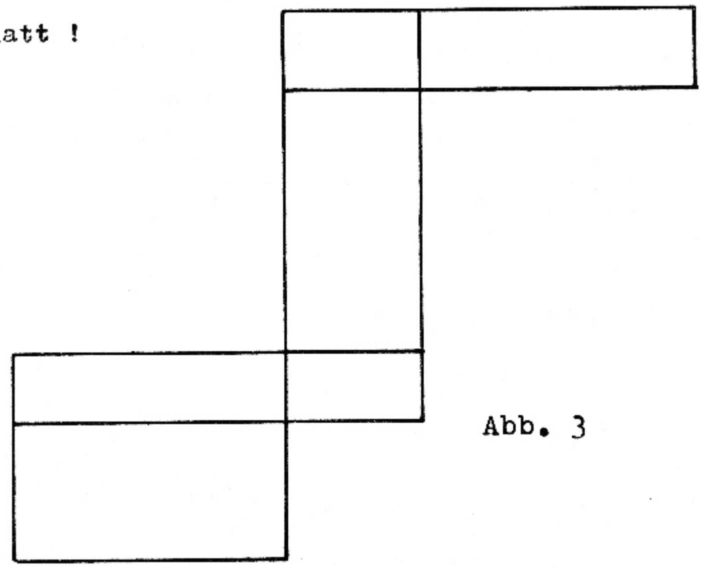


Abb. 3

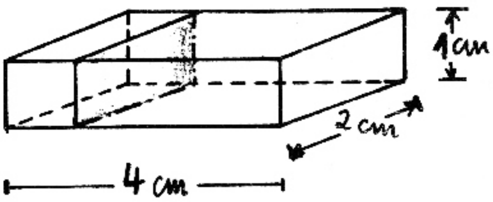
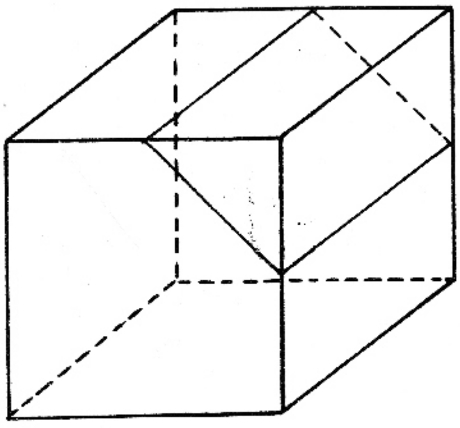


Abb. 4

WAHLAUFGABEN

c) Zeichne das zugehörige Würfelnetz mit dem Ebenenschnitt.



Mathematik–Wettbewerb 1976 des Landes Hessen

Aufgaben der Gruppe C

PFLICHTAUFGABEN

1. a) Mit welcher Bruchzahl muß man $\frac{4}{9}$ multiplizieren, um 1 zu erhalten ?

   b) Wie oft muß man $\frac{3}{4}$ von 50 subtrahieren, um 8 zu erhalten ?

   c) Addiert man zwei Bruchzahlen, so erhält man $\frac{17}{12}$.
   Subtrahiert man die kleinere Bruchzahl von der größeren Bruchzahl, so erhält man $\frac{1}{12}$. Wie heißen die beiden Bruchzahlen ?

   d) Addiert man zwei Bruchzahlen, so erhält man 3 . Die eine Bruchzahl ist um $\frac{1}{2}$ größer als die andere. Wie heißen die beiden Bruchzahlen ?

2. Ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm soll in Quadrate und Rechtecke zerlegt werden. Für diese Aufgabe gilt: Länge und Breite eines Rechtecks sind verschieden.

   a) Das Quadrat soll von 3 Geraden zerlegt werden in:
   (1) 3 Quadrate und 3 Rechtecke,
   (2) 2 Quadrate und 4 Rechtecke,
   (3) 1 Quadrat und 5 Rechtecke.

   b) (1) Das Quadrat soll in 36 gleich große Quadrate zerlegt werden. Wie viele Geraden sind hierzu nötig ?

   (2) Ein anderes Quadrat soll in 100 gleich große Quadrate zerlegt werden. Wie viele Geraden sind jetzt erforderlich ?

WAHLAUFGABEN

3. Otto spart seit seinem letzten Geburtstag regelmäßig 1,20 DM pro Woche. Nach 9 Wochen beginnen auch Karin, Rita und Hans, wöchentlich einen festen Betrag zu sparen.

   a) Karin spart wöchentlich 1,80 DM. Nachdem Karin 7 Wochen lang gespart hat, vergleichen Otto und Karin ihre Ersparnisse. Wer von beiden hat mehr gespart ? Berechne den Unterschied !

   b) Nachdem Rita 12 Wochen lang gespart hat, sind ihre Ersparnisse genau-so groß wie die Ersparnisse von Otto. Wieviel DM hat Rita wöchentlich gespart ?

   c) Nach einiger Zeit haben Otto und Hans den gleichen Betrag von 43,20 DM in ihrer Spardose.
   (1) Wieviel Wochen hat Otto dafür gespart ?
   (2) Welchen Betrag sparte Hans wöchentlich ?

4. a) Zeichne die abgebildeten Würfelnetze (Fig.1 und Fig. 2) ab. Trage jeweils die Zahlen ein, daß nach dem Falten der Würfel die Summe der Augenzahlen auf je zwei einander gegenüberliegenden Flächen stets 7 beträgt !

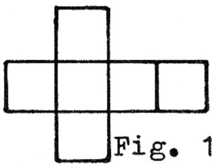


Fig. 1

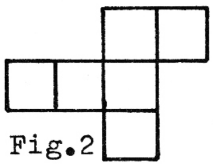


Fig.2

   b) Zeichne das abgebildete Würfelnetz (Fig. 3) ab. Trage die Zahlen 8, 12, 14, 16, 18, 22 so in die Felder des Würfelnetzes ein, daß nach dem Falten des Würfels die Summe der Zahlen auf je zwei einander gegenüberliegenden Flächen stets gleich ist !

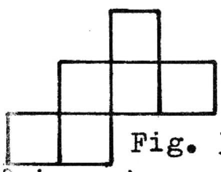


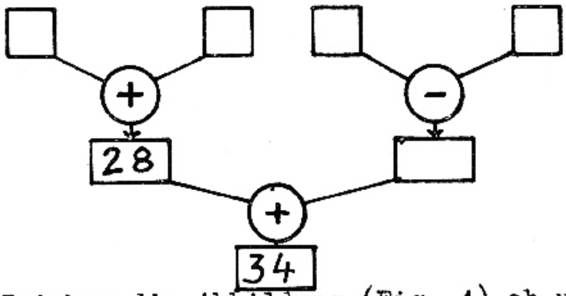
Fig. 3

   c) Auf einem besonderen Würfel beträgt die Summe der Zahlen auf je zwei einander gegenüberliegenden Flächen stets 28. Mit diesem Würfel wurde sechsmal gewürfelt. Die Summe der sechs Würfe betrug 100. Zweimal wurde die Zahl 11 und dreimal die Zahl 21 gewürfelt. Welche Zahlen befanden sich außer 11 und 21 noch auf dem Würfel ?

3. Runde – 13. Mai 1976

WAHLAUFGABEN

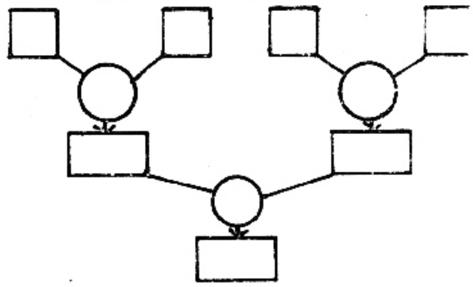
5.



☐ ist Platzhalter für die Zahlen 1; 3; 9; 27 .

◯ ist Platzhalter für die Verknüpfungszeichen + oder – .

a) Zeichne die Abbildung (Fig. 4) ab und trage die Zahlen 1; 3; 9; 27 so ein, daß Du das Ergebnis 34 erhältst !



b) Zeichne die Abbildung (Fig. 5) ab und trage die vier gegebenen Zahlen und die Verknüpfungszeichen so ein, daß Du das Ergebnis 20 erhältst. Schreibe drei verschiedene Lösungsmöglichkeiten auf !

c) Wie heißt die größte natürliche Zahl, die Du als Ergebnis erhalten kannst ?

d) Wie heißt die kleinste natürliche Zahl, die Du als Ergebnis erhalten kannst ? Zeichne die Abbildung (Fig. 5) ab und gib einen Lösungsweg an

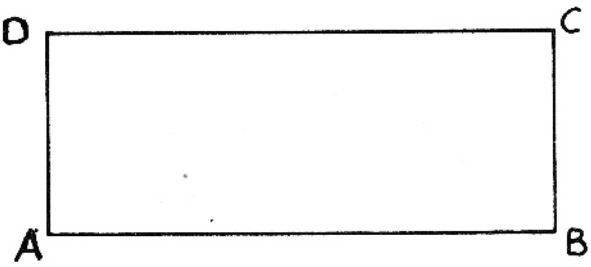
6. Bei Tarifverhandlungen werden folgende Vorschläge eingereicht:
1. Vorschlag: Allgemeine Lohnerhöhung um 7,5 %
2. Vorschlag: Erhöhung des Monatslohnes um 108,00 DM.
Herr Adam verdiente bisher monatlich 1.350,00 DM, Herr Becker 2.160,00 DM.

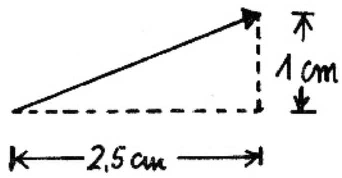
a) Berechne die neuen Monatslöhne von Herrn Adam und Herrn Becker bei Annahme des 1. Vorschlags !

b) Um wieviel Prozent erhöht sich bei Annahme des 2. Vorschlags
(1) der Monatslohn des Herrn Adam,
(2) der Monatslohn des Herrn Becker ?

c) Für Herrn Claus führen beide Vorschläge zur gleichen Erhöhung seines Monatslohnes. Wie hoch ist sein bisheriger Monatslohn ?

7. Gegeben ist das Rechteck ABCD mit a = 5 cm und b = 2 cm.





a) Zeichne das Rechteck ABCD und verschiebe es in Richtung und um den Betrag des Verschiebungspfeils. Bestimme die Fläche der Gesamtfigur !

b) Zeichne das Rechteck ABCD und spiegele es an einer seiner Diagonalen. Bestimme das gemeinsame Flächenstück !

c) Drehe das Rechteck ABCD so, daß das gemeinsame Flächenstück ein Quadrat mit der Fläche von 4 cm^2 ist. Es gibt mehrere Lösungen. Zeichne eine davon und gib das Drehzentrum an !