MATHEMATIK-WETTBEWERB 1976/77 DES LANDES HESSEN 3. RUNDE

PFLICHTAUFGABEN A

1. In der Menge $N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ wird die folgende Verknüpfung erklärt:

   $a * b = \bar{a} + \bar{b}$; dabei ist $\bar{a}$ der Rest von a bei Division durch 4, $\bar{b}$ der Rest von b bei Division duch 5.

   B e i s p i e l: $7 * 22 = 3 + 2 = 5$

   a) Berechne: $9 * 17$
   $11 * 31$

   b) Welche Zahlen können als Ergebnis der Verknüpfung auftreten ?

   c) Wie lauten die Lösungen der Gleichung $a * b = 6$ mit $a \leqq 8$, $b \leqq 8$? Gib alle Zahlenpaare (a|b) an !

2. Gegeben sind die Mengen $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
   und $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

   a) Bestimme die Lösungsmenge der Aussageform $y = 4 - x^2$ mit $x \in A$ und $y \in B$!

   b) Stelle die Lösungsmenge durch Punkte im Koordinatensystem dar !

   c) Drehe die in b) erhaltene Punktmenge um 90° im Uhrzeigersinn um den Ursprung des Koordinatensystems ! Welche Aussageform hat die erhaltene Punktmenge als Lösungsmenge ?

   d) Spiegele die in b) erhaltene Punktmenge an der x-Achse ! Gib die Aussageform an, zu der die jetzt erhaltene Punktmenge Lösungsmenge ist !

WAHLAUFGABEN

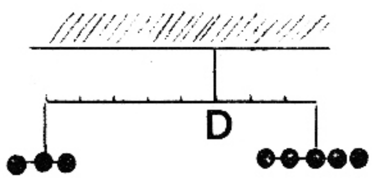
3. Bestimme natürliche Zahlen x und y, die jeweils die folgenden Gleichungen erfüllen. Zeige in jedem Falle, daß die Lösungsmenge keine anderen Elemente erhalten kann.

   a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

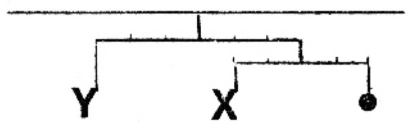
   b) $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 1$

   c) $\frac{1}{x} + \frac{x}{y} = 1$

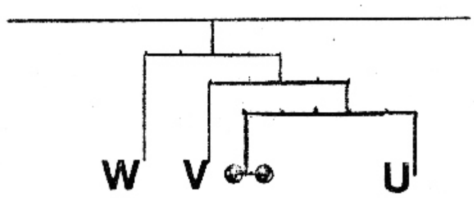
4. Zum Bau eines Mobiles benutzt man untereinander gleiche Kugeln. Die skizzierte Anordnung ist im Gleichgewicht, weil die Produkte aus der Anzahl der Kugeln und der Länge der Trägerarme rechts und links von D denselben Wert ergeben. Dabei wird der Einfluß der Träger und Fäden vernachlässigt. Für die folgenden Fälle gelten entsprechende Überlegungen.



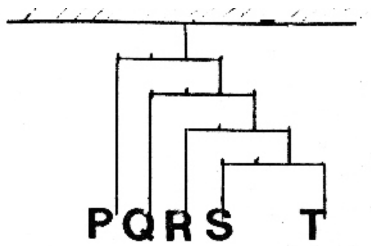
   a) Wie viele Kugeln müssen bei x und y angehängt werden, damit Gleichgewicht herrscht ?



   b) Bestimme die Zahlen u, v, w, so daß Gleichgewicht herrscht !



c) Gib zwei Möglichkeiten an, dieses Mobile im Gleichgewicht zu halten. Erkennst Du eine Gesetzmäßigkeit für die Anzahl der Kugeln ?



WAHLAUFGABEN

A

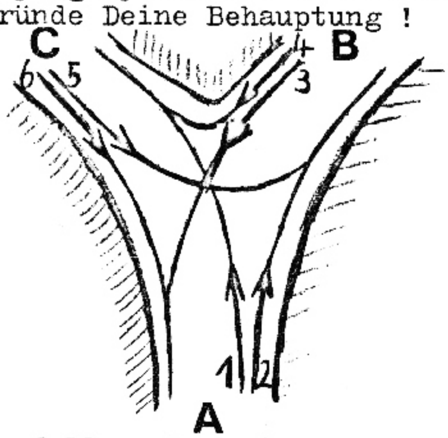
5. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sei der Winkel $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 90^\circ$.

a) Spiegele C an der Geraden AB und A an der Geraden BC. Der Spiegelpunkt von C sei D, der von A sei E. Zeichne ! Begründe, daß die Figur ADEC ein Rhombus ist !

b) Spiegele A an der Geraden DE, der Spiegelpunkt sei F. Zeichne ! Begründe, daß das Dreieck AFD gleichseitig ist !

c) Spiegele A an der Geraden FC, der Spiegelpunkt sei G. Zeichne und beschreibe die Figur AFGC. Begründe Deine Behauptung !

6. An einer Straßengabelung gibt es 6 Fahrspuren 1, 2, 3, 4, 5, 6, wobei es zu jeder Fahrspur genau eine Ampel mit den Farben 'rot' (r) und 'grün' (g) gibt. Die Ampeln werden so geschaltet, daß stets möglichst viele Fahrspuren grün haben, ohne daß es zu Überschneidungen oder zum Zusammentreffen innerhalb der Spuren kommt.
Beispiel: Wenn die Ampel 1 grün hat, dann zeigen die Ampeln 3 und 4 beide zugleich rot (vielleicht auch noch weitere), die Ampel 2 kann dagegen ebenfalls grün zeigen.



a) Trage in einer Tabelle alle Möglichkeiten für die Schaltung ein!

	Ampel 1	2	3	4	5	6
1. Schaltphase						
2. Schaltphase						
3. Schaltphase						

usw.

b) In jeder möglichen Ampelstellung können auf jeder freien Spur jeweils 5 Autos die Straßengabelung passieren. Wie viele Autos können nach einmaligem Durchlaufen aller Ampelstellungen von A nach B bzw. C, von B nach A bzw. C und von C nach A bzw. B gefahren sein? Trage die Anzahlen in eine Tabelle ein!

von \ nach	A	B	C
A	–		
B		–	
C			–

c) Wie viele Autos können in einer Stunde die Kreuzung passieren, wenn jede einzelne Ampelstellung genau eine Minute dauert und alle möglichen Ampelstellungen gleichoft auftreten (pro Ampelstellung gemäß b) 5 Autos in jede zulässige Richtung) ?

W A H L A U F G A B E

7. a) Zehn Quadrate der Seitenlänge 1 cm sollen das Netz einer quadratischen Säule mit der Grundfläche 1 cm^2 bilden. Zeichne ein solches Netz!

b) Zwei quadratische Säulen gemäß a) sollen an einem oder an zwei Quadraten vollständig zusammenstoßen und so einen neuen Körper bilden. Skizziere 5 derartig zusammengesetzte Körper, die sich nicht durch Verschieben oder Drehen ineinander überführen lassen.

c) Zeichne ein Netz desjenigen Körpers - entsprechend b) zusammengesetzt - der die kleinste Oberfläche hat !

AUFGABEN DER GRUPPE **B** 3. RUNDE

PFLICHTAUFGABEN

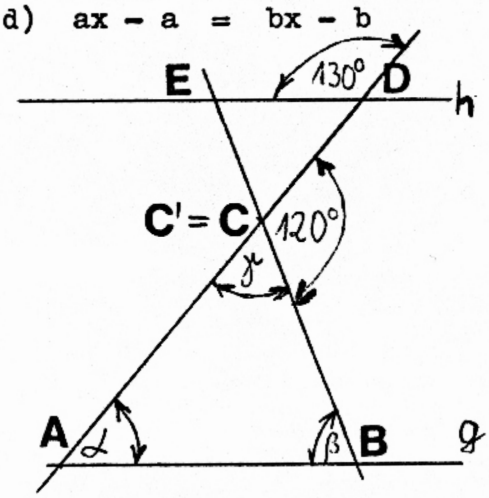
1. Bestimme die jeweilige Lösungsmenge!

   a) $4x + 4 = 5x + 5$ $G = \mathbb{Z}$

   b) $4x : 4 < 5x : 5$ $G = \mathbb{Z}$

   c) $2x - 7 < 6x + 5$ $G = \mathbb{Z}$

   d) $ax - a = bx - b$ $a, b \in \mathbb{Z}$ und $G = \mathbb{Z}$

2. 

Für nebenstehende Figur gilt:

a) g parallel zu h

b) $\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AC}$

a) Bestimme die Größen der Winkel α, β und γ !

b) Wie viele der Dreiecke CDE passen in das Dreieck ABC hinein ?

c) Um wieviel Grad (kleiner als 360°) und in welcher Drehrichtung muß die Gerade AD um den Punkt C gedreht werden, damit das jeweilige Dreieck A'BC gleichschenklig ist ? Gib alle drei Möglichkeiten an !

WAHLAUFGABEN

3. Ein Zahnrad mit 192 Zähnen wird um 60° gedreht.

   a) Um wie viele Zähne ist das Zahnrad gedreht worden ?

   b) Ein zweites Zahnrad mit 128 Zähnen greift in das erste ein. Um welchen Winkel ist das zweite mitgedreht worden ?

   c) Ein drittes Zahnrad greift in das zweite ein. Bei der Drehung des ersten Zahnrades um 60° hat es genau zwei Umdrehungen mitgemacht. Wie viele Zähne hat das dritte Zahnrad ?

4. Welche natürlichen Zahlen mußt Du für die Variablen x beziehungsweis y einsetzen, so daß wahre Aussagen entstehen ?

   a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1$ b) $\frac{5}{y} - \frac{3}{y} = 2$

   Welche natürlichen Zahlen mußt Du für die Variablen x, y einsetzen, damit wahre Aussagen entstehen ?
   Lege dazu jeweils eine Tabelle an !

   c) $\frac{1}{y} + \frac{2}{y} + \frac{x}{y} = 1$

   d) $\frac{14}{y} - \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

x				
y				

WAHLAUFGABEN

5. Die Verknüpfungen $*$ und $\oplus$ sind wie folgt festgelegt:

$a * b = a + 2b \qquad a \oplus b = 2a - b \qquad a, b \in Z$

Beispiele: $7 * 13 = 33$; $7 \oplus 3 = 11$

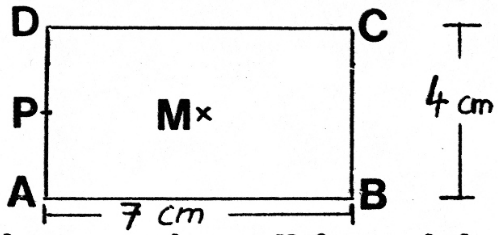
a) Berechne:
   1. $2 \oplus (-5)$
   2. $(4 * 4) \oplus 4$
   3. $(4 \oplus 4) * 4$

b) Bestimme die Lösungsmenge : $(-3) \oplus x = 7$ $\qquad G = Z$

c) Setze an Stelle von $\triangle$ und $\square$ jeweils eines der Verknüpfungszeichen $*$ oder $\oplus$, so daß eine wahre Aussage entsteht:

$(8 \triangle 2) \square 15 = 13$

6. Für das Rechteck ABCD gilt:
   - P halbiert die Strecke $\overline{AD}$
   - M halbiert die Strecke $\overline{AC}$



a) Zeichne das Rechteck ABCD mit den angegebenen Maßen und den Punkt M! Verschiebe es so, daß der Bildpunkt von D auf M fällt ! Wie groß ist der Flächeninhalt der so entstandenen Gesamtfigur ?

b) Die Verschiebung von Aufgabenteil a) läßt sich auch durch eine zweimalige Spiegelung ersetzen. Zeichne die beiden Spiegelachsen g und h ein, wobei g durch den Punkt M gehen soll!

c) Zeichne das Rechteck noch einmal und drehe es um den Punkt P so, daß der Bildpunkt von B auf C fällt ! Bestimme den Flächeninhalt der gemeinsamen Fläche von Ausgangsfigur und Bildfigur !

7. Sechs Kugeln sind von 1 bis 6 numeriert.

a) Sie sind genau die Elemente einer Menge M. Wie viele Teilmengen von M mit genau 3 Elementen gibt es ? (bzw.: Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit einem Griff irgendwelche 3 Kugeln herauszugreifen?)

b) Die Kugeln sind rot, schwarz oder weiß; von jeder genannten Farbe gibt es mindestens eine Kugel. Wenn man 4 Kugeln herausgreift, ist mindestens eine rote darunter; greift man 5 Kugeln heraus, so ist mindestens eine schwarze darunter. Wie viele Kugeln sind rot, wie viele sind schwarz, wie viele weiß ?

c) Die Nummern aller roten und schwarzen Kugeln ergeben zusammen 15; die Summe der Nummern aller weißen und schwarzen Kugeln ist kleiner als 11. Welche Farbe hat die Kugel Nr. 1 , die Kugel Nr. 2 usw. (Gib alle Möglichkeiten an !) ?

AUFGABEN DER GRUPPE C

PFLICHTAUFGABEN

1. Peter hat ein Legespiel mit gleich großen Plättchen, die die Form und die Maße der Figur 1 haben.

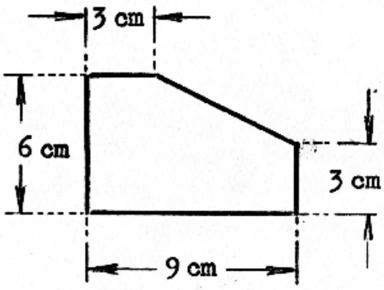


Fig. 1


Fig. 2

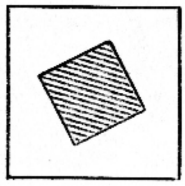


Fig. 3

a) Berechne den Flächeninhalt eines Legeplättchens (Fig. 1)!
b) Peter legt mit je vier dieser Plättchen die Muster der Figuren 2 und 3.
(1) Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche der Figur 2 !
(2) Bei Figur 3 sind zwei Quadrate zu erkennen. Berechne den Flächeninhalt des schraffierten Quadrates!

2. Beim Bau einer Autobahn werden die Planierungsarbeiten für die Streckenabschnitte A, B und C vergeben.
a) Im Streckenabschnitt A können die Arbeiten beim Einsatz von 4 Planierraupen in 42 Tagen ausgeführt sein.
Die Baufirma setzt 6 Planierraupen ein.
Nach wieviel Tagen hat die Baufirma den Arbeitsauftrag erfüllt?

b) Im Streckenabschnitt B können die Planierungsarbeiten von 9 Planierraupen in 56 Tagen beendet sein. Die Bauleitung fordert aber, daß die Arbeiten in 36 Tagen ausgeführt sein sollen.
Wieviel Planierraupen müssen eingesetzt werden?

c) Im Streckenabschnitt C sind 7 Planierraupen erforderlich, um den Arbeitsauftrag in 48 Tagen zu erfüllen. Die Baufirma setzt aber nach 12 Tagen zusätzlich noch 2 Planierraupen ein.
Nach wieviel Tagen hat die Baufirma den Arbeitsauftrag beendet?

WAHLAUFGABEN

3. An einem Sportfest spielten 5 Handballvereine (A, B, C, D, E) gegeneinander. Jeder Verein spielte genau einmal gegen jeden anderen Verein.
Fülle auf dem Lösungsbogen die vorgegebene Tabelle vollständig aus!
Beachte:
Das Punktverhältnis beträgt bei einem
gewonnenen Spiel 2 : 0
unentschiedenen Spiel 1 : 1
verlorenen Spiel 0 : 2

Verein	Punktverhältnis	Spiele gewonnen	unentschieden	verloren
A	4 :	1		
B	:	4		
C	:			
D	2 :		2	
E	: 3		1	

4. Bestimme die jeweiligen Lösungsmengen!

a) $3 \cdot x = 2 \cdot x + 4$ $\quad G = \mathbb{N}$

b) $3 \cdot x > 2 \cdot x + 4$ $\quad G = \mathbb{N}$

c) $6 \cdot x + 13 = -5$ $\quad G = \mathbb{Z}$

d) $\frac{12 \cdot x}{2 + x} = 8$ $\quad G = \mathbb{N}$

e) $8 - x > 6$ $\quad G = \mathbb{Z}$

W A H L A U F G A B E N

5. Führe die folgenden Aufgaben auf dem Lösungsbogen in einer Zeichnung durch.

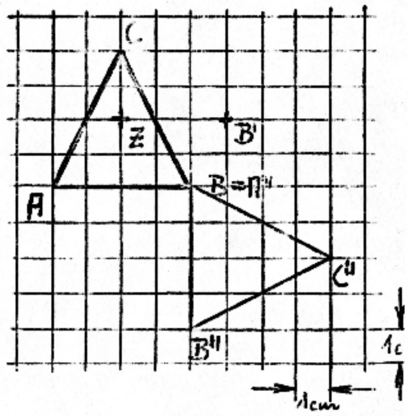
a) Verschiebe das Dreieck ABC so, daß B auf B' abgebildet wird.

b) Drehe das Dreieck ABC um den Punkt Z um 180°.

c) Schraffiere das Flächenstück, welches das Dreieck ABC mit der Abbildung der Aufgabe (a) und zugleich auch mit der Abbildung der Aufgabe (b) gemeinsam hat.
Gib die schraffierte Fläche als Bruchteil der Fläche des Dreiecks ABC an!

d) Das Dreieck ABC wird durch Drehung auf das Dreieck A" B" C" abgebildet (siehe Abb.).

(1) Bestimme (markiere auf dem Lösungsbogen) das Drehzentrum!
(2) Gib das Maß des Drehwinkels an!



6. Zwei Städte liegen 420 km voneinander entfernt.

a) Herr Hahl durchfährt mit seinem Auto die gesamte Strecke in 280 Minuten.
Gib seine Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h an!

b) Auf dem Rückweg fährt er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h.
Wieviel Minuten benötigt er jetzt für die gesamte Strecke?

c) Bei der nächsten Fahrt durchfährt er 320 km mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h und den Rest der Strecke wegen Bauarbeiten mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h.
Welche Zeit benötigt Herr Hahl bei dieser Fahrt für die gesamte Strecke?

7. Die Klassen 8 möchten eine Klassenfahrt durchführen. Die Klassensprecher holen bei zwei Busunternehmen Kostenvoranschläge ein.

Busunternehmen A verlangt pro gefahrenen Kilometer 1,80 DM
Busunternehmen B verlangt 60,- DM Grundgebühr und
für jeden gefahrenen Kilometer 1,40 DM

a) Die Klasse 8 a will insgesamt 130 km fahren. Sie wählt das preisgünstigste Angebot.
Bei welchem Unternehmen bestellte sie den Bus? Begründe durch Rechnung!

b) Die Klasse 8 b will insgesamt 190 km zurücklegen.
Mit welchem Busunternehmen fährt sie am günstigsten? Begründe durch Rechnung!

c) Die Klasse 8 c müßte bei beiden Busunternehmen den gleichen Preis zahlen.
Wieviel Kilometer fährt sie?

d) Die Klasse 8 d fährt mit dem Busunternehmen B, weil dort die Fahrt 40,- DM billiger ist als bei Busunternehmen A.
Wieviel Kilometer legt die Klasse 8 d mit dem Bus zurück?