

Mathematik-Wettbewerb 1978 des Landes Hessen  
(gem. Erlaß II B 3-1005/211-138 v. 6. 9. 1977)

2. Runde  
15. 3. 1978

Aufgaben der Gruppe A

A

PFLICHTAUFGABEN

1. In der Menge der ganzen Zahlen wird folgende Verknüpfung betrachtet:

$$x \circ y = (x + y)^2 - (x - y)^2$$

Beispiel:  $7 \circ 3 = (7 + 3)^2 - (7 - 3)^2 = 84$

a) Berechne  $4 \circ (-5)$

$(-3) \circ (-4)$

b) Zeige, daß gilt:  $3 \circ (4 \circ 5) = (3 \circ 4) \circ 5$

c) Zeige, daß für alle  $a, b \in \mathbb{Z}$  gilt:

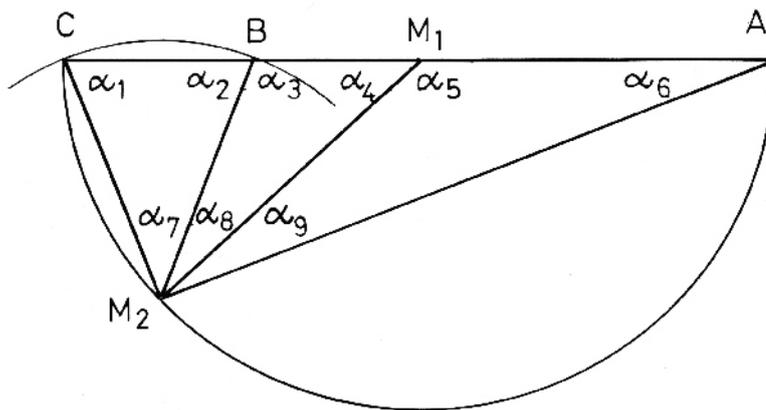
$$a \circ b = b \circ a$$

2. a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 6 cm.  
 b) Konstruiere den Schnittpunkt S der Symmetrieachsen (Mittelsenkrechten) des Dreiecks ABC, halbiere die Strecke  $\overline{SC}$  und nenne den Punkt H.  
 c) Drehe das Dreieck ABC um den Punkt H um  $50^\circ$ , so daß sich die Seiten  $\overline{A'B'}$  und  $\overline{BC}$  schneiden. Zeichne!  
 Welchen Winkel bilden die Seiten  $\overline{A'B'}$  und  $\overline{BC}$ ?  
 d) Wie groß ist der Drehwinkel zu wählen, damit die Seite  $\overline{A'B'}$  senkrecht auf  $\overline{CB}$  steht?

A

WAHLAUFGABEN

3.  $M_1$  und  $M_2$  sind die Mittelpunkte der eingezeichneten Kreisbögen.  
 a) Gib alle Strecken an, die paarweise gleichlang sind.  
 b) Bestimme die Größe der Winkel  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_9$ , wenn  $w(\alpha_1) = 75^\circ$ .



Aufgaben: Es sind die beiden Pflichtaufgaben und 2 Wahlaufgaben zu lösen.

Arbeitszeit: Maximal 90 Minuten – bei Punktgleichheit entscheidet die benötigte Arbeitszeit über die Platzierung.

Hilfsmittel: Taschenrechner oder Rechenstäbe dürfen *nicht* benutzt werden!

Fortsetzung der Aufgaben der Gruppe A

A

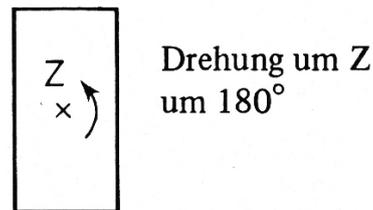
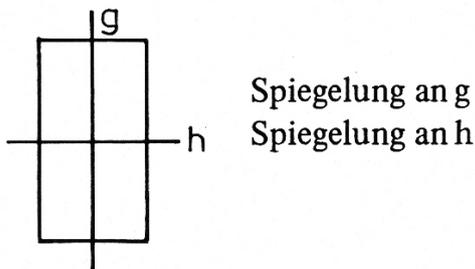
4. Beate will ihre Freundin Sabine dringend anrufen, hat aber von deren fünfstelliger Telefonnummer die letzte Ziffer vergessen.
- Wie oft muß Beate im ungünstigsten Fall wählen?
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie beim erstmaligen Wählen die richtige Nummer erwischt?  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Nummer?
  - Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß ihr der erste Versuch mißlingt und sie beim 2. Versuch die richtige Nummer wählt.
  - Beate hat nur 60 Pf. für den Münzfernsprecher und kann daher höchstens 3mal wählen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt das Gespräch nicht zustande?

5. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?  
Belege Deine Behauptungen durch Erläuterungen an Beispielen oder Mengendiagrammen.

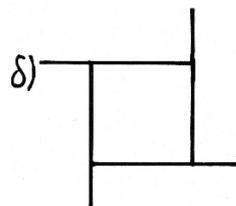
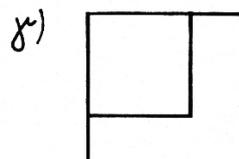
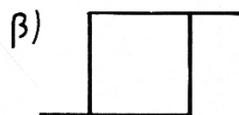
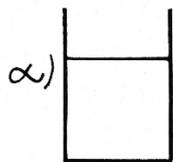
A und B sind beliebige Mengen, mit endlich vielen Elementen!

- Wenn  $A \subset B$  ist, dann ist  $A \cap B = A$
- Wenn  $A \setminus B = A$  ist, dann ist  $A \cap B = \{ \}$
- $(A \cup B) \setminus B = A$
- $(A \cap B) \cup A = A$  gilt nur, wenn  $B = \{ \}$  ist.
- Wenn  $A \cap B \neq \{ \}$  ist, dann ist  $Z(A \cup B) < Z(A) + Z(B)$   
( $Z(A)$  gibt die Anzahl der Elemente von A an)

6. Ein Rechteck kommt bei folgenden Abbildungen mit sich selbst zur Deckung:



- a) Gib *ebenso* alle Spiegelungen bzw. Drehungen an, die folgende Figuren in sich überführen:  
(für alle Drehwinkel  $\alpha$  gilt:  $0^\circ < w(\alpha) < 360^\circ$ )



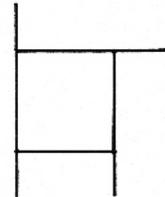
WAHLAUFGABEN

Fortsetzung der Aufgaben der Gruppe A

WAHLAUFGABEN

A

- b) Ergänze folgende Figur jeweils so, daß sie durch
- α) genau eine Drehung und nicht durch Spiegelungen
  - β) genau eine Spiegelung und nicht durch Drehungen
- in sich übergeführt werden kann.  
(Für alle Drehwinkel  $\alpha$  gilt  $0^\circ < w(\alpha) < 360^\circ$ )



7. Herr Grün erzählt über seine Familie:

- Anton ist 1 Jahr jünger als Berta,
- Claudia ist 2 Jahre älter als Berta,
- zusammen sind sie 13 Jahre alt.

Wenn Doris so alt sein wird wie Claudia heute ist, wird Claudia 3mal so alt sein wie Anton heute ist.

In 5 Jahren bin ich 3mal so alt wie Claudia dann sein wird.

In einigen Jahren ist meine Frau 3mal so alt wie eines und 4mal so alt wie ein anderes meiner Kinder. Anton wird dann mindestens so alt sein wie Claudia heute ist.

Wie alt sind Anton, Berta, Claudia, Doris, Frau Grün und Herr Grün *heute*?

Mathematik-Wettbewerb 1978 des Landes Hessen  
(gem. Erlaß II B 3-1005/211-138 v. 6. 9. 1977)

2. Runde  
15. 3. 1978

**Aufgaben der Gruppe B**

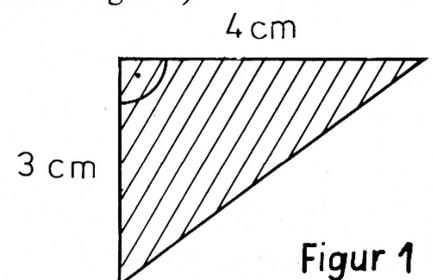
PFLICHTAUFGABEN

- B**
1. a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 6 cm.  
 b) Verschiebe dieses Dreieck ABC so, daß der Bildpunkt von C auf dem Mittelpunkt der Seite  $\overline{BC}$  liegt.  
 c)  $\alpha$ ) Schraffiere die Schnittmenge von Urfigur und Bildfigur.  
     $\beta$ ) Wie oft ist die schraffierte Fläche in der Fläche der Gesamtfigur enthalten?  
 d) Zeichne die Symmetrieachse der Gesamtfigur.  
 e) Ergänze die Gesamtfigur, so daß die so entstandene Figur genau 3 Symmetrieachsen hat.
  2. Bestimme die jeweilige Lösungsmenge:
 

a) $3x - 3 = 5 - 5x$	$G = \mathbb{N}$
b) $8(x + 2) + x^2 > x(x - 8) - 16$	$G = \mathbb{Z}$
c) $3x \cdot 3 = 3x : 3$	$G = \mathbb{Q}$
d) $3x \cdot 3 < 3x : 3$	$G = \mathbb{Q}$

WAHLAUFGABEN

- B**
3. 225 Schüler besuchen die 8. Klassen einer großen Schule.
    - a) 44 % davon sind Jungen.  
Berechne die Anzahl der Mädchen und Jungen!
    - b) In den 8. Klassen besitzen 189 Schüler das Freischwimmerzeugnis.  
Wieviel Prozent sind das?
    - c) Unter den 225 Schülern sind 141 Fahrtenschwimmer, 117 Schüler gehören einem Verein an; 37 sind weder Fahrtenschwimmer noch sind sie Mitglied eines Vereins.  
Berechne die Anzahl der Schüler, die Fahrtenschwimmer sind und zugleich Mitglied eines Vereins.
  4. Ein Legespiel enthält Legeplättchen, welche die Form rechtwinkliger Dreiecke haben, deren kürzere Seiten 3 cm und 4 cm lang sind (siehe Figur 1).
    - a) 8 solcher Plättchen soll man zu einem Rechteck zusammensetzen.  
Gib zu jedem möglichen Rechteck die Länge und Breite an.



**Aufgaben:** Es sind die beiden Pflichtaufgaben und 2 Wahlaufgaben zu lösen.

**Arbeitszeit:** Maximal 90 Minuten – bei Punktgleichheit entscheidet die benötigte Arbeitszeit über die Platzierung.

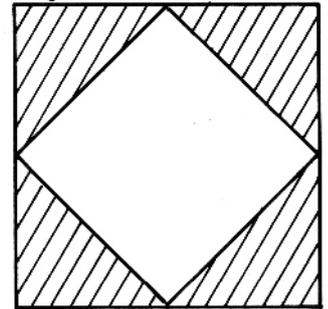
**Hilfsmittel:** Taschenrechner oder Rechenstäbe dürfen *nicht* benutzt werden!

Fortsetzung der Aufgaben der Gruppe B

B

- b) Aus 4 der Plättchen wurde nebenstehende Figur 2 gelegt. Es sind zwei Quadrate entstanden.  
 α) Berechne den Flächeninhalt des äußeren Quadrats!  
 β) Berechne den Flächeninhalt des nicht-schraffierten Quadrats!  
 γ) Berechne die Seitenlänge des nichtschraffierten Quadrats.
- c) Es soll mit möglichst wenigen solcher Plättchen ein Quadrat zusammengesetzt werden, so daß die Fläche des Quadrats vollständig mit Plättchen ausgelegt ist. Wie viele Plättchen sind dazu nötig?

Figur 2



WAHLAUFGABEN

5. Professor Kluge wird nach seiner Telefonnummer gefragt. Er antwortet: „Sie ist 6-stellig und enthält 4 ungerade Ziffern. Jede Ziffer ist größer als die Ziffer, die rechts neben ihr steht. Die Summe aller Ziffern beträgt 22“.
- a) Wie heißt die Telefonnummer, wenn in ihr keine Null vorkommt?  
 b) Welche Telefonnummern kommen in Frage, wenn sie jeweils eine Null enthalten sollen?  
 c) Der Professor wird um eine zusätzliche Angabe gebeten. Er sagt: „Außer der Null sind die Ziffern meiner Telefonnummer nicht nur Primzahlen und Quadratzahlen“.  
 Nenne die Telefonnummer des Professors.
6. Die Verknüpfung  $a \circ b$  zweier rationaler Zahlen  $a$  und  $b$  – wobei  $b \neq 0$  ist – wird wie folgt erklärt:

$$a \circ b = a - \frac{a}{b};$$

Beispiel:  $3 \circ 2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}$

- a) Berechne entsprechend:  
 α)  $7 \circ 4$   
 β)  $(+7) \circ (-2)$
- b) Prüfe durch Rechnung nach, ob  
 α)  $3 \circ 4 = 4 \circ 3$  und  
 β)  $(6 \circ 3) \circ 4 = 6 \circ (3 \circ 4)$  gilt
- c) Bestimme  $a$ , wenn  $a \in \mathbb{Q}$  ist:  
 $a \circ 2 = 2$
- d) Für welche  $a \in \mathbb{Z}$  und  $b \in \mathbb{N}$  ist  
 $a \circ b = 0$ ?  
 Gib alle Möglichkeiten an!

**Fortsetzung der Aufgaben der Gruppe B**

**WAHLAUFGABEN B**

7. a) Zeichne ein Dreieck ABC aus  $|\overline{AB}| = 8 \text{ cm}$ ;  
 $w(\alpha) = 35^\circ$ ;  $w(\beta) = 75^\circ$ .
- b) Spiegele dieses Dreieck ABC an der Mittelsenkrechten von  $\overline{AB}$  und bezeichne den Bildpunkt von C mit D, den Schnittpunkt von  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$  mit S. Zeichne die Strecke  $\overline{CD}$ .
- c) Berechne die Größe der Winkel, die von den Diagonalen des Vierecks ABCD gebildet werden.  
 Trage sie in die Figur ein.
- d) Berechne die Größe der Winkel des Dreiecks ASD und trage sie entsprechend in Deine Zeichnung ein.
- e) Gib alle gleichschenkligen Dreiecke in der Gesamtfigur an.

**Mathematik-Wettbewerb 1978 des Landes Hessen**  
(gem. Erlaß II B 3-1005/211-138 v. 6. 9. 1977)

2. Runde  
15. 3. 1978

**Aufgaben der Gruppe C**

**C**

1. Die 9. Klassen einer Schule bestellen Busse für eine Tagesfahrt.
  - a) Die Klasse 9 a (28 Personen) muß für den Bus insgesamt 378,- DM zahlen.
    - (1) Berechne die Fahrtkosten für eine Person!
    - (2) An der Fahrt können 4 Personen wegen Krankheit nicht teilnehmen.  
Wieviel DM muß nun jeder Teilnehmer zahlen?
  - b) Die Klasse 9 b muß für den Bus insgesamt 402,- DM zahlen.  
6 Personen nehmen nicht teil. Daher muß jeder Teilnehmer 16,75 DM für die Fahrt zahlen.
    - (1) Wieviel Personen nehmen an der Fahrt teil?
    - (2) Wieviel DM müßte jede Person zahlen, wenn alle teilnehmen würden?
  - c) Bei der Klasse 9 c soll der Fahrpreis pro Person 15,- DM betragen.  
Da aber 3 Personen an der Fahrt nicht teilnehmen, erhöht sich der Fahrpreis um 1,50 DM je Teilnehmer.  
Wieviel Personen nehmen an der Fahrt teil?
  
2. Peter kauft ein Aquarium.
 

Das Aquarium hat die Innenmaße: 48 cm lang, 25 cm breit und 30 cm hoch.

  - a) Berechne das Volumen (Rauminhalt) des Aquariums!
  - b) Wieviel  $\text{cm}^3$  Wasser werden benötigt, um das Aquarium  $\frac{3}{4}$  zu füllen?
  - c) Peter füllt sein Aquarium mit 30 Liter Wasser.  
Wie hoch steht das Wasser in dem Aquarium? (1 Liter =  $1000 \text{ cm}^3$ )
  - d) Die Glaswände des Aquariums haben eine Stärke von 1 cm.  
Berechne die Außenmaße des Aquariums!

PFLICHTAUFGABEN

**C**

3. Berechne den jeweiligen Wert für x!
 

a) $4 \cdot x = 48$	d) $16 + 3 \cdot x = (27 - 17) \cdot 4$
b) $36 - x = 17$	e) $2 \cdot x = 0,4 \cdot 6 + 1,6$
c) $3 \cdot x = 4 \cdot 7 + 5$	f) $0,1 \cdot x + 0,2 \cdot x = 1,2$

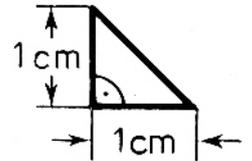
WAHLAUFGABEN

Fortsetzung der Aufgaben der Gruppe C

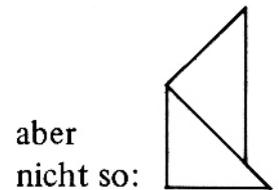
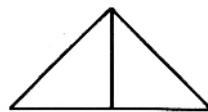
C

4. Anita hat ein Legespiel. Die Legeplättchen sind rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke (siehe Skizze).

Die Legeplättchen dürfen nur so aneinander gelegt werden, wie es die angegebenen Beispiele zeigen.



Beispiele mit zwei Legeplättchen:



- a) Anita soll mit je 4 dieser Legeplättchen nicht deckungsgleiche Vierecke legen. Es gibt fünf verschiedene Möglichkeiten. Zeichne die Vierecke!

- b) Anita legt 4 dieser Legeplättchen zu einem Dreieck zusammen. Zeichne es!

5. Zeichne das rechtwinklige Dreieck ABC entsprechend der Skizze.

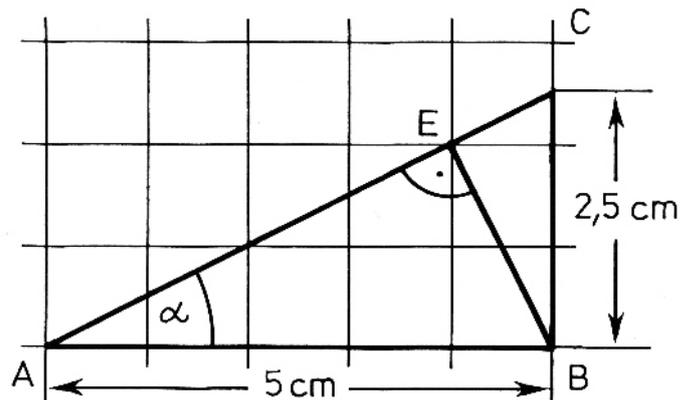
- a) Spiegele den Punkt B an der Geraden AC, Du erhältst den Bildpunkt D. Zeichne das Viereck ABCD!

- (1) Berechne den Umfang des Vierecks ABCD!  
 (2) Berechne die Fläche des Vierecks ABCD!

- b) Zeichne das Dreieck ABC noch einmal.

- ( $\alpha$ ) Spiegele das Dreieck ABC an der Geraden BE (siehe Skizze). Du erhältst das Dreieck A'B'C'.

- ( $\beta$ ) Wie groß sind die Innenwinkel des Dreiecks ABA', wenn der Winkel  $\alpha$   $32^\circ$  groß ist?



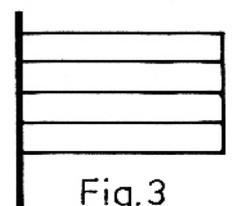
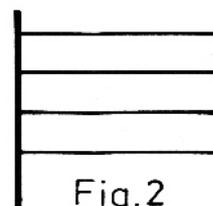
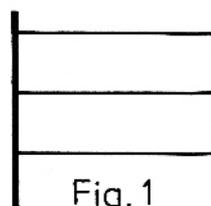
WAHLAUFGABEN

6. Ein Verein möchte sich eine Vereinsfahne anfertigen lassen.

Zur Verfügung stehen rote (r), weiße (w) und grüne (g) Stoffe.

Die Fahnen können zwei, drei oder vier Bahnen haben.

Gleichfarbige Bahnen dürfen nicht aneinander genäht werden.

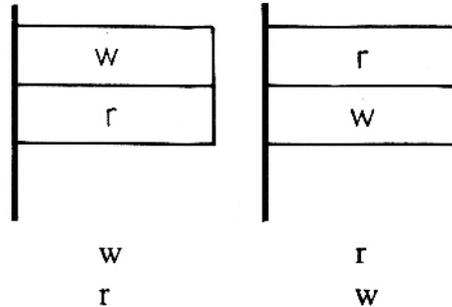


Fortsetzung der Aufgaben der Gruppe C

C

- a) Die Fahne soll aus zwei Bahnen genäht werden (Fig. 1).

Zwei Möglichkeiten:



Es gibt noch mehr Möglichkeiten. Schreibe sie auf!

- b) Die Fahne soll aus drei Bahnen genäht werden. (Fig. 2)  
 (α) Die Fahne soll zweifarbig sein.  
 (β) Die Fahne soll dreifarbig sein.  
 Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils? Schreibe sie auf!
- c) Die Fahne soll aus vier Bahnen genäht werden. (Fig. 3)  
 (α) Die Fahne soll zweifarbig sein.  
 (β) Die Fahne soll dreifarbig sein.  
 Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils?

7. Im Ausverkauf werden Mäntel zu herabgesetzten Preisen angeboten.

- a) Ein Damenmantel, der bisher 480,— DM kostete, wird im Ausverkauf 45 % billiger angeboten.  
 (1) Um wieviel DM wurde der Preis des Damenmantels herabgesetzt?  
 (2) Wie teuer ist der Damenmantel im Ausverkauf?
- b) Bei einem Kindermantel wird der Preis um 42,— DM herabgesetzt, das sind 35 % des bisherigen Verkaufspreises.  
 Berechne (1) den bisherigen Verkaufspreis,  
 (2) den Ausverkaufspreis.
- c) Ein Herrenmantel wird im Ausverkauf zum Preis von 252,— DM angeboten.  
 Der bisherige Preis betrug 350,— DM.  
 Wieviel % des ursprünglichen Preises beträgt der Preisnachlaß?

WAHLAUFGABEN