# A

## PFLICHTAUFGABEN

1. Auf einer Straße, die mit Kilometersteinen versehen ist, fahren Autos mit konstanten Geschwindigkeiten. Auto 1 fährt mit 40 km/h, Auto 2 mit 60 km/h. Auto 1 fährt bei km 96 ab in Richtung km 0. Auto 2 fährt zur gleichen Zeit bei km 0 in entgegengesetzter Richtung ab.

   a) Wo befinden sich die beiden Fahrzeuge zur Zeit $t = 60$ min, wo zur Zeit $t = 120$ min ?

   b) Stelle die Bewegung der beiden Fahrzeuge in beiliegendem Koordinatensystem dar. Lies aus der Zeichnung ab, wo und wann sich die beiden Wagen treffen.

   Stelle die Bewegung der folgenden Autos in dem gleichen Koordinatensystem dar und lies jeweils die Ergebnisse ab.

   c) Auto 3 fährt so schnell wie Auto 1 und kommt bereits nach 1 Stunde bei km 0 an. Wo ist Auto 3 abgefahren?

   d) Wann muß ein Auto 4 bei km 0 mit der gleichen Geschwindigkeit wie Auto 2 abfahren, damit es 2 Stunden nach Abfahrt von Auto 1 dieses trifft?

   e) Auto 5 fährt 30 min nach Auto 2 bei km 0 ab und holt Auto 2 bei km 80 ein. Wie schnell fährt Auto 5 ?

   f) Wann muß ein Auto 6 bei km 0 abfahren, das die gleiche Geschwindigkeit wie Auto 2 hat und 30 min nach Abfahrt von Auto 2 bei km 80 ankommt ?

2. a) Konstruiere zwei Kreise mit den Radien $r_1 = 3$ cm und $r_2 = 2$ cm, die sich in einem Punkt berühren.

   b) Konstruiere drei Kreise mit $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 3$ cm und $r_3 = 4$ cm, die sich paarweise berühren.

   c) Zeichne zwei Kreise mit den Radien $r_1 = 2$ cm und $r_2 = 3$ cm, deren Mittelpunkte den Abstand 9 cm haben.
   Konstruiere einen Kreis, der die beiden Kreise berührt.

   d) Die Mittelpunkte dreier Kreise mit den Radien $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ cm haben jeweils den Abstand 6 cm.
   Konstruiere einen vierten Kreis, der alle drei berührt.

   BEACHTE: Bei allen Aufgabenteilen sind jeweils zwei prinzipiell verschiedene Lösungen anzugeben!

---

## WAHLAUFGABEN

3. Jede gerade Zahl kann dargestellt werden als Produkt $2 \cdot n$ mit $n \in \mathbb{N}$; eine ungerade Zahl als $2m + 1$ mit $m \in \mathbb{N}_0$.

   Beweise jeweils:

   a) Das Produkt zweier gerader Zahlen ist durch 4 teilbar.

   b) Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade.

   c) Die Differenz der Quadrate zweier aufeinanderfolgender ungerader Zahlen ist durch 8 teilbar.

   d) Für 3 aufeinanderfolgende ungerade Zahlen gilt jeweils: Die Differenz der Quadrate der beiden äußeren Zahlen ist das 8-fache der mittleren Zahl.

W A H L A U F G A B E N

4. a) Ein Trapez heißt rechtwinklig, wenn es <u>genau</u> zwei rechte Winkel hat.

   Konstruiere ein rechtwinkliges Trapez, das durch eine Diagonale zerlegt wird in ein rechtwinkliges Dreieck und ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten 4 cm lang sind.

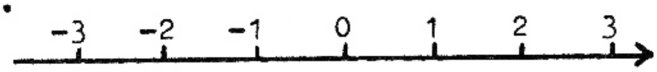
   Berechne die Länge der Mittelparallelen in diesem Trapez.

   b) Es gibt symmetrische Trapeze, bei denen die Diagonalen senkrecht zueinander verlaufen ( Quadrate sind ausgeschlossen ) .

   Konstruiere ein solches Trapez.

   Beweise, daß bei allen symmetrischen Trapezen mit rechtwinklig zueinander verlaufenden Diagonalen die Mittelparallele so lang ist wie die Höhe des Trapezes.

5. Am Anfang eines Spieles liegt ein Spielstein im Punkte 0 der Zahlengeraden.




   Beim Werfen einer Münze fällt Wappen oder Bild jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,5. Zeigt die Münze Wappen, so wird der Stein jeweils um eins nach rechts verschoben - im anderen Fall entsprechend nach links.

   a) Die Münze wird dreimal geworfen. Wo kann der Spielstein danach liegen? Gib die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten an!

   b) Die Münze wird viermal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Spielstein danach im Punkte -2 oder 2 ?

   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Spielstein nach 99 Zügen rechts von der 0 ?

   d) Die Wahrscheinlichkeit, daß der Stein nach n-maligem Würfeln sich im Punkte X befindet beträgt $\frac{1}{1024}$ .
   Bestimme n und X !

6. a) Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an; $G = \mathbb{Z}$ !

   α) $x^{100} + x^{99} = 0$

   β) $x^{21} - x^{20} < 0$

   γ) $x^{21} - 16x^{17} > 0$

   b) Kennzeichne in einem Koordinatensystem die Punkte $(x|y)$, die den folgenden Bedingungen genügen:

   $x^4 - y^4 < 0$ und $x,y \in \mathbb{Z}$ .

7. a) Ein Rechteck, dessen Seitenlängen sich um 2 cm unterscheiden, hat einen um 1 $cm^2$ kleineren Flächeninhalt als ein Quadrat mit gleichem Umfang. Berechne alle Seitenlängen.

   b) Ein Rechteck hat einen um 4 $cm^2$ kleineren Flächeninhalt als ein umfanggleiches Quadrat. Um wieviel cm unterscheiden sich die Seitenlängen des Rechtecks?

   c) Wie groß ist der Unterschied der Flächeninhalte zwischen Rechteck und umfanggleichem Quadrat, wenn sich die Seitenlängen des Rechtecks um a unterscheiden?

# MATHEMATIK-WETTBEWERB 1981/82 DES LANDES HESSEN 3. RUNDE

## B

### PFLICHTAUFGABEN

1.) Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an.

a) $(5x + 4)\cdot 3 < 5x - 8$ $\qquad G = Z$

b) $(5x + 4)^2 = (5x - 8)\cdot 5x$ $\qquad G = Q$

c) $(5x - 4)^2 < (5x - 8)\cdot 5x$ $\qquad G = Q$

d) $(5x+4)(5x-4) + 25x = 5\cdot(5x+8) - 7$ $\qquad G = Q$

2.) a) Zeichne ein gleichschenkliges Trapez ABCD mit $|AB| = 8$ cm; $|CD| = 4$ cm; $h = 6$ cm und $|AD| = |BC|$.

b) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes.

c) Zeichne die Diagonalen des Trapezes. Nenne ihren Schnittpunkt M. Drehe das Trapez im Punkt M um 90° nach links (positive Drehrichtung). Benenne die Bildpunkte mit A', B', C' und D'.

d) Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die Urfigur und Bildfigur gemeinsam haben.

---

### WAHLAUFGABEN

3.) Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an.

a) $\frac{3}{3x} = \frac{3}{4}$ $\qquad G = Q^+$

b) $(x - 1)(x - 2) = (1 - x)(3 - x)$ $\qquad G = Z$

c) $0{,}5x\cdot(x - 1) = 0$ $\qquad G = Z$

d) $(x - 1)(x - 2) > 0$ $\qquad G = Z$

4.) a) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $|AB| = 8$ cm und $\alpha = \beta = 50°$.

b) Konstruiere den Umkreis des Dreiecks.

c) Zeichne die Symmetrieachse des Dreiecks. Ihre Schnittpunkte mit dem Umkreis sind C und D.

d) Konstruiere (ohne zu messen) die Winkelhalbierende des Winkels $\alpha$. Sie schneidet die Symmetrieachse im Punkt E.

e) Berechne die Größe der Winkel $\sphericalangle$ CAE und $\sphericalangle$ AED.

f) Begründe, daß $\sphericalangle$ CAD = 90°.

g) Beweise, daß $|AD| = |DE|$.

5.) Gastwirt Kneip will seinen rechteckigen Saal mit quadratischen PVC-Fliesen von 40 cm Seitenlänge auslegen lassen. Der Saal ist 19,20 m lang und 12,80 m breit.

a) Wie viele Fliesen werden benötigt?

WAHLAUFGABEN

5.) b) Im Kostenvoranschlag (Material- und Lohnkosten) sind 35 % Materialkosten enthalten.

(1) Vervollständige die Aufstellung:

| | | |
|---|---|---|
| Materialkosten | 4300,80 | DM |
| Lohnkosten | | DM |
| Gesamtkosten | | DM |

(2) Wie teuer ist 1 $m^2$ der Fliesen einschließlich der Lohnkosten?

c) Bei Rechnungsstellung betragen die tatsächlichen Gesamtkosten 12687,36 DM. Als Begründung für die Mehrkosten wird eine Lohnerhöhung angegeben. Berechne die Lohnerhöhung in Prozent.

6.) Zahlenfolgen heißen "summenfrei", wenn sie keine Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft a + B = c enthalten.

Beispiele: die Folge 3, 5, 6, 9 ist nicht summenfrei, weil 3 + 6 = 9;
dagegen ist die Folge 3, 5, 6, 10 summenfrei.

a) Gegeben ist die Zahlenfolge 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Bilde aus dieser Folge neue Folgen, die jeweils 4 Zahlen enthalten und summenfrei sind. Gib alle Möglichkeiten an.

b) Es sollen summenfreie Zahlenfolgen so gebildet werden, daß jeweils die kleinstmögliche Zahl folgt.

Beispiele: 1, 2, 4, 7, ... ist richtig; 1, 2, 4, 8, ... ist falsch, weil die Zahl 7 ausgelassen wurde; 1, 2, 4, 7, 8, ... ist falsch, weil die Folge nicht summenfrei ist.

(1) Bestimme die ersten 11 Glieder der so gebildeten Zahlenfolgen:

($\alpha$) 2, 3, 4, .... ($\beta$) 3, 5, 6, ....

(2) Wie heißt in der zweiten Folge ($\beta$) die erste Zahl, die größer als 100 ist?

c) Warum ist eine Folge, die nur aus ungeraden Zahlen besteht, stets summenfrei?

7.) a) 4 Dosen Milch und 2 Dosen Erbsen wiegen zusammen 3700 g. 4 Dosen Milch und 5 Dosen Erbsen wiegen zusammen 6550 g. Wie schwer ist jeweils 1 Dose jeder Sorte?

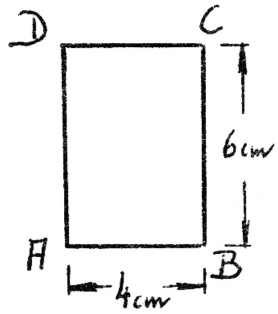
b) 5 Flaschen Wein einer Sorte und 3 Flaschen Traubensaft kosten zusammen 23,40 DM. Eine Flasche Wein ist genau doppelt so teuer wie eine Flasche Traubbensaft. Wie teuer ist 1 Flasche jeder Sorte?

c) Klaus sagt zu Fritz: "Die Summe aus meinem Gewicht und deinem doppelten Gewicht ist 361 Pfund." Fritz sagt zu Klaus: "Die Summe aus meinem Gewicht und deinem doppelten Gewicht ist 362 Pfund." Wie schwer sind die beiden?

d) Die Summe von drei natürlichen Zahlen ist 15, das Produkt dieser Zahlen ist 80. Wie heißen die Zahlen?

# C

**PFLICHTAUFGABEN**




1. Zeichne das Rechteck ABCD mit den in der Skizze angegebenen Maßen.

   a) Halbiere die Strecke $\overline{BC}$ und Du erhältst den Punkt H.
   Markiere auf der Strecke $\overline{CD}$ den Punkt G, der vom Punkt C 1 cm entfernt ist.

   b) (1) Die Gerade GH schneidet die Gerade AB im Punkt K.
   (2) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks AKG!

   c) (1) Spiegele den Punkt A an der Geraden GK. Du erhältst den Punkt F.
   (2) Zeichne das Viereck AKFG und bestimme dessen Flächeninhalt!
   (3) Zeichne das Viereck AKFH und bestimme dessen Flächeninhalt!

   d) (1) Spiegele den Punkt G an der Geraden AF. Du erhältst den Punkt E.
   (2) Zeichne das Viereck AEFG und bestimme dessen Flächeninhalt ohne zu messen!

2. Beachte bei der Lösung der folgenden Aufgaben: 1 Promille = 1 ‰ = $\frac{1}{1\,000}$

   Herr Meier versichert seinen Besitz gegen Feuer.

   a) Das Wohnhaus (Wert: 225 000,- DM) wird gegen Feuer versichert.
   Der Prämiensatz beträgt 0,6 ‰ .
   Wie hoch ist der Versicherungsbeitrag?

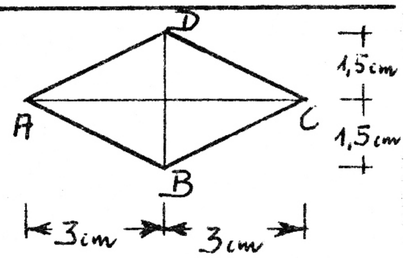
   b) Für die Nebengebäude (Wert: 18 000,- DM) zahlt er jährlich 9,00 DM.
   Berechne den Prämiensatz in Promille!

   c) Für das Mobiliar zahlt er 1,2 ‰ , das sind 80,40 DM.
   Berechne den Wert des Mobiliars!

   d) Nach einem Wohnungsbrand kürzte die Versicherung die von Herrn Meier angegebene Schadenssumme um 18 % und zahlte nur 19 270,- DM.
   Welche Schadenssumme hatte Herr Meier angegeben?

---

**WAHLAUFGABEN**




3. a) (1) Zeichne die abgebildete Raute ABCD mit den in der Skizze angegebenen Maßen.
   (2) Berechne den Flächeninhalt der Raute ABCD !

   b) (1) Zeichne die Gerade h, die parallel zu der Geraden BD durch den Punkt A geht.
   (2) Die Verlängerung der Strecke BC schneidet die Gerade h im Punkt E.
   (3) Errichte im Punkt E auf der Geraden h die Senkrechte t .
   (4) Die Gerade CD schneidet die Gerade t im Punkt F und die Gerade h im Punkt G .

   c) Gib den Flächeninhalt der Raute ABCD als Bruchteil des Dreiecks EFG an!

   d) Verwandle das Dreieck EFG in ein flächengleiches Rechteck.
   Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten.
   Gib eine dieser Möglichkeiten an!

WAHLAUFGABEN

4. Berechne die fehlenden Werte!

| | x | y | Term | Wert des Terms |
|---|---|---|---|---|
| Beispiel: | 8 | 4 | $5x - 7y - 3$ | $5 \cdot 8 - 7 \cdot 4 - 3 = 9$ |
| a) | 4 | 2 | $5x - 7y - 3$ | |
| b) | 3 | -2 | $5x - 7y - 3$ | |
| c) | 9 | | $5x - 7y - 3$ | $= 0$ |
| d) | 10 | 8 | $5x - 7 \cdot (y - 3)$ | |
| e) | 4 | | $5x - 7 \cdot (y - 3)$ | $= 20$ |
| f) | 2 | | $5x - 7 \cdot (y - 3)$ | $= 52$ |
| g) | | 6 | $5 \cdot (x-7) \cdot (y-3)$ | $= 0$ |

5. a) Landwirt Lehmann hat für seine 600 Hühner einen Futtervorrat, der 120 Tage reichen würde. Er kauft noch 200 Hühner dazu. Wie lange reicht nun der Futtervorrat?

b) Landwirt Meier und Landwirt Kunz haben einen gleich großen Futtervorrat. Bei Landwirt Meier reicht der Futtervorrat bei 720 Hühnern 75 Tage, bei Landwirt Kunz reicht er 90 Tage. Wieviel Hühner hat Landwirt Kunz?

c) Landwirt Noll hat für seine 300 Hühner einen Futtervorrat für 100 Tage. Nach 40 Tagen verkauft er 75 Hühner. Wie lange reicht der Futtervorrat insgesamt?

6. a) Zwei Grundstücke A und B sind zusammen 1 800 $m^2$ groß. Das Grundstück A ist 280 $m^2$ größer als das Grundstück B. Gib den Flächeninhalt der beiden Grundstücke an!

b) Drei Grundstücke D, E und F sind zusammen 2 400 $m^2$ groß.

(1) Die beiden Grundstücke E und F bilden zusammen eine Fläche, die viermal so groß ist wie das Grundstück D. Wie groß ist die Fläche des Grundstücks D?

(2) Das Grundstück E ist 460 $m^2$ kleiner als das Grundstück F. Wie groß sind die jeweiligen Flächen der Grundstücke E und F.

7. Schreibe die Tabelle auf Dein Arbeitsblatt und trage die Ergebnisse der Aufgaben (a) und (b) ein.

| | gewonnen | unentschieden | verloren | Punktverhältnis |
|---|---|---|---|---|
| Stand nach dem 20. Spiel | | | | |
| Stand nach dem 32. Spiel | | | | 36 : 28 |

a) Ein Handballverein hat nach 20 Spieltagen 40 % der Spiele gewonnen, 25 % der Spiele verloren, die anderen waren unentschieden.

(1) Wieviel Spiele hat er gewonnen, verloren, wie viele waren unentschieden?

(2) Das Punktverhältnis beträgt
bei einem gewonnenen Spiel 2 : 0
bei einem unentschiedenen Spiel 1 : 1
bei einem verlorenen Spiel 0 : 2
Gib das Punktverhältnis an!

b) Von den folgenden 12 Spielen hat der Verein $33\frac{1}{3}$ % der Spiele gewonnen. Das neue Punktverhältnis beträgt 36 : 28.
Ergänze die Tabelle!

c) Nach 36 Spielen hatte der Verein ein Punktverhältnis von 40 : 32. Wieviel Spiele wurden nach dem 32. Spieltag gewonnen, verloren, wie viele gingen unentschieden aus?
Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Gib alle Möglichkeiten an!