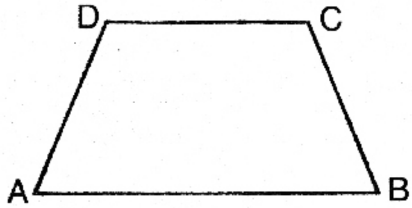
MATHEMATIK-WETTBEWERB 1983/84 DES LANDES HESSEN 3. RUNDE

AUFGABEN DER GRUPPE A

PFLICHTAUFGABEN



1. a) Konstruiere ein achsensymmetrisches Trapez, dessen Diagonalen sich rechtwinklig schneiden. Die Grundseite $\overline{AB}$ soll 8 cm lang sein, die Höhe h = 5,6 cm sein.

   b) Berechne die Länge der Seite $\overline{CD}$.

   c) Beweise folgende Aussage: Wenn in einem achsensymmetrischen Trapez die beiden Schenkel jeweils genauso lang sind wie die Grundseite $\overline{AB}$, dann ist die Diagonale $\overline{AC}$ Winkelhalbierende für den Winkel γ .

2. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an; G = Z.

   a) $(x - 6)^2 \leq 0$

   b) $(x - 6)^2 > 0$

   c) $(2x + 5)(3x - 4) = 0$

   d) $(x - 6)^2 = 16$

   e) $(2x - 8)(6x - 18) > 0$

WAHLAUFGABEN

3. a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $|AC| = 6$ cm, Höhe $h_c = 4$ cm und Winkelhalbierende $w_\alpha = 7$ cm.

   b) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $|AB| = 7$ cm, $|AC| = 9$ cm und $|BC| = 10$ cm. Konstruiere eine Raute, bei der eine Ecke in A liegt und deren andere Ecken auf den Seiten des Dreiecks liegen.

   c) Beweise folgende Aussage: Sind in einem spitzwinkligen Dreieck zwei Höhen gleich lang, so ist das Dreieck gleichschenklig.

4. Beweise folgende Aussagen:

   a) Das Quadrat der Summe zweier natürlicher Zahlen vermindert um das Quadrat der Differenz dieser beiden Zahlen ist gleich dem vierfachen Produkt der beiden Zahlen.

   b) Für natürliche Zahlen a, b gilt stets:
   $$\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 > \frac{ab}{2}$$

   c) Sind a, b, c drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, so gilt:
   $$2(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 < 0$$

5. Zeichne in je einem der beiliegenden Koordinatensysteme alle Punkte mit den Koordinaten $(x|y)$ ein, mit $x, y \in \{-6, -5, ..., 5, 6\}$, die den folgenden Bedingungen genügen:

   a) $y < x + 3 \quad \wedge \quad y > 1$

   b) $y > x + 1 \quad \wedge \quad y < x + 5$

   c) $y > x^2 \quad \wedge \quad y < x + 5$

WAHLAUFGABEN

6. In der Menge G = {0, 1, 2, 3, ..., 17, 18, 19} ist eine Verknüpfung "$\odot$" nach folgender Vorschrift erklärt:
Die beiden Zahlen aus G werden zunächst miteinander multipliziert. Von diesem Zwischenergebnis wird dann 20 so oft subtrahiert, bis man eine Zahl aus G erhält.
Beispiel: $6 \odot 14 = 84 - 20 - 20 - 20 - 20 = 84 - 4 \cdot 20 = 4$

a) Berechne: (1) $18 \odot 15 =$
(2) $5 \odot 12 =$

b) Bestimme zu folgenden Gleichungen die Lösungsmenge:
(1) $7 \odot x = 2$
(2) $8 \odot x = 0$
(3) $x \odot x = 4$

c) Potenzen sind wie üblich als Produkte aus n gleichen Faktoren definiert:
$$a^{n} = \underbrace{a \odot a \odot a \odot \ldots \odot a}_{\text{n Faktoren}}$$
Man rechnet zum Beispiel: $6^{3} = 6 \odot 6 \odot 6 = (36 - 20) \odot 6 = 16 \odot 6 = 16$
Bestimme: (1) 5^{38}
(2) 11^{200}
(3) 2^{61}

7. Bei einem Test werden fünf Fragen gestellt. Zu jeder Frage stehen drei Antworten zur Auswahl, von denen jeweils genau eine richtig ist.
Markus kreuzt ohne zu überlegen zufällig je eine Antwort an.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beantwortet er die erste Frage richtig?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beantwortet er alle Fragen richtig?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beantwortet er alle Fragen falsch?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beantwortet er die ersten beiden Fragen richtig und die übrigen falsch?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beantwortet er genau vier Fragen richtig?

(Es genügt die Angabe der Wahrscheinlichkeiten als Produkt oder Potenz.)

AUFGABEN DER GRUPPE B

PFLICHTAUFGABEN

1. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an.

   a) $7(4x + 5) = 12x - 45$ $\qquad G = \mathbb{Z}$

   b) $7(4x - 5) < 12(x - 5)$ $\qquad G = \mathbb{Z}$

   c) $(4x - 5)^2 < (4x^2 - 5)\cdot 4$ $\qquad G = \mathbb{Z}$

   d) $(4x-5)(4x+5) - (4x-5) = -14 - 4x(2x+1)$ $\qquad G = \mathbb{Q}$

2. a) Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AB| = |AC| = 8$ cm und $\beta = 79°$.

   b) Berechne die Größe des Winkels α.

   c) Konstruiere einen Punkt D auf $\overline{AB}$, der von A und C gleichweit entfernt ist.

   d) Verlängere $\overline{BC}$ nach beiden Seiten und konstruiere die Punkte E und F auf BC, für die gilt: $|DC| = |CE| = |CF|$.

   e) Berechne die Größe der Winkel $\sphericalangle DCB$, $\sphericalangle DEB$ und $\sphericalangle DFB$.

WAHLAUFGABEN

3. Zur Lösung der folgenden Aufgaben ist zunächst jeweils eine entsprechende Gleichung anzugeben.

   a) Verlängert man alle Kanten eines Würfels um 3 cm, so vergrößert sich die Würfeloberfläche um 306 cm². Bestimme die Kantenlänge des ursprünglichen Würfels.

   b) Bei einem Quader ist die Länge doppelt so groß wie die Breite und die Höhe ein Viertel der Länge. Die Summe aller Kantenlängen beträgt 168 cm. Berechne Länge, Breite und Höhe des Quaders.

   c) Wie groß ist die Kantenlänge eines Würfels, dessen Volumen um 16 cm³ größer ist als das Volumen eines Quaders? Die Länge des Quaders ist um 1 cm größer, die Höhe um 1 cm kleiner als die Kantenlänge des Würfels. Die Breite des Quaders ist genauso groß wie die Kantenlänge des Würfels.

4. a) Zeichne in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm ein Viereck mit den Punkten $A(3|5)$, $B(5|5)$, $C(5|8)$, $D(0|8)$.

   b) Spiegele das Viereck an der Geraden, die durch B und durch den Punkt 0 (Nullpunkt) geht.

   c) Berechne den Flächeninhalt des Drachenvierecks AOA'B, ohne zu messen.

   d) Wenn man die Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ und $\overline{OA'}$ verdoppelt, entsteht ein neues Drachenviereck mit dem gemeinsamen Eckpunkt 0.
      (1) Gib die Koordinaten der neuen Eckpunkte an.
      (2) Wieviel mal so groß ist der Flächeninhalt des neuen Drachenvierecks im Vergleich zum ursprünglichen Drachenviereck?

   e) Die Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ und $\overline{OA'}$ sollen entsprechend verdreifacht werden. Wieviel mal so groß ist jetzt der Flächeninhalt des neuen Drachenvierecks?

WAHLAUFGABEN

5. Die bei Goldschmuck eingestanzte Zahl 750 bedeutet, daß $\frac{750}{1000}$ der Gesamtmasse aus Gold sind, der Rest ist aus einem anderen Metall. In der Fachsprache benutzt man, um den Goldanteil eines Schmuckstücks anzugeben, auch den Begriff Karat.
Ein Karat entspricht $\frac{1}{24}$ der Gesamtmasse.

a) Ergänze die Tabelle:

Karat	24	18	21	
Goldanteil in Tausendstel	1000			625

b) 54 g Gold werden mit 18 g eines anderen Metalls zu einem Goldreif verarbeitet. Wieviel Karat hat der Goldreif ?

c) Ein 6 g schwerer Goldring von 20 Karat soll zusammen mit einem 10 g schweren Goldring von 12 Karat geschmolzen und zu zwei gleichschweren Ringen verarbeitet werden.
(1) Wieviel g Gold enthalten diese beiden Ringe zusammen?
(2) Wieviel Karat hat ein neu hergestellter Ring?

6. Die vier Ziffern der Jahreszahl 1984 sollen durch die Rechenzeichen +, -, • und : verknüpft werden, so daß jeweils rationale Zahlen entstehen.

Beispiele: $1 + 9 \cdot 8 - 4 = 69$
$1 - 9 - 8 : 4 = -10$

Die Reihenfolge der Ziffern soll unverändert bleiben. Klammern sollen nicht gesetzt werden.

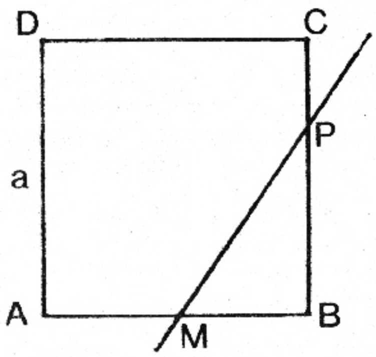
a) Setze zwischen die Ziffern jeweils eins der vier Rechenzeichen, so daß wahre Aussagen entstehen:

$$1 \quad 9 + 8 \quad 4 = 41$$
$$1 \quad 9 \quad 8 \quad 4 = 7$$

b) Welches ist die größte und welches ist die kleinste Zahl, die auf solche Weise gebildet werden kann?

c) Wie viele unterschiedliche Aufgaben lassen sich bilden,
(1) wenn alle Rechenzeichen verschieden sind,
(2) wenn jeweils zwei Zeichen gleich sind?

7. Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Vom Mittelpunkt M einer Seite wird durch eine Gerade MP jeweils ein Dreieck MBP abgeschnitten (siehe Figur).



a) P liegt auf der Mitte von $\overline{BC}$.
Welcher Teil der Quadratfläche wird durch die Gerade MP abgeschnitten?

b) Wie lang muß $\overline{BP}$ sein, damit die Dreiecksfläche genau $\frac{1}{10}$ der Quadratfläche ist?

c) Die abgeschnittene Dreiecksfläche soll kleiner als $\frac{1}{7}$ der Quadratfläche sein.
Wie lang darf die Strecke $\overline{BP}$ höchstens sein?

d) Der Winkel $\sphericalangle PMB$ ist 60° groß. Wie lang ist $\overline{MP}$?
Begründe Deine Antwort.

AUFGABEN DER GRUPPE C

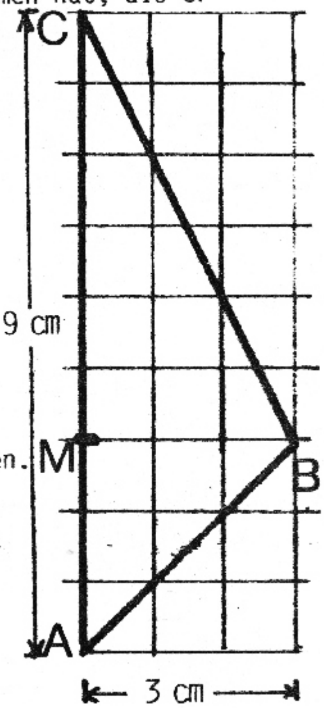
PFLICHTAUFGABEN

1. a) Ein Händler kauft auf dem Großmarkt 75 kg Bananen. Beim Auspacken stellt er fest, daß 3 kg verdorben sind. Wieviel Prozent der Bananen können nicht mehr verkauft werden?

   b) Von den unverdorbenen Bananen kann er $\frac{3}{4}$ zu 2,50 DM pro kg verkaufen. Die übrigen Bananen bietet er für 1,25 DM pro kg an, da sie bereits überreif sind. Wieviel DM hat der Händler insgesamt beim Verkauf der Bananen eingenommen?

   c) Die Abrechnung zeigt, daß der Kaufmann 40% mehr Geld eingenommen hat, als er für die gesamte Lieferung auf dem Großmarkt bezahlt hat. Wieviel mußte der Händler für die Lieferung bezahlen?

2. a) Zeichne das Dreieck ABC entsprechend nebenstehender Skizze.



   b) (1) Spiegele Punkt B an der Geraden AC. Du erhältst Punkt D. Zeichne das Viereck ABCD.
      (2) Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

   c) Drehe das Viereck ABCD um Punkt M entgegen dem Uhrzeigersinn um 90° (A' = B).

   d) (1) Schraffiere das gemeinsame Flächenstück der Vierecke ABCD und A'B'C'D'. Bestimme den Flächeninhalt des gemeinsamen Flächenstückes, ohne zu messen.
      (2) Bestimme den Flächeninhalt des Gesamtfigur, ohne zu messen.

   e) Zeichne alle Spiegelachsen der Gesamtfigur farbig ein.

WAHLAUFGABEN

3. Bestimme die jeweilige Lösungsmenge! $G = \mathbb{N}_0$

   a) $3 \cdot x + 9 = 36$

   b) $3 \cdot x + 9 \cdot x > 36$

   c) $5 \cdot (0{,}3 \cdot x + 0{,}9 \cdot x) = 36$

   d) $36 - 8 \cdot 2 = 2 \cdot (x - 4)$

   e) $36 - 8 \cdot x = (0{,}2 \cdot x + 0{,}2) \cdot 4$

   f) $(36 - 0{,}6 \cdot x) \cdot 0{,}2 = (0{,}2 + 0{,}4) \cdot x$

   g) $3 \cdot x \cdot x + 36 < 63$

4. Eine Autofirma testet ihr neues Modell.

   a) Für eine Strecke von 480 km benötigte ein Testauto 45,6 l Benzin. Wie hoch ist der Verbrauch auf 100 km?

   b) Bei einer weiteren Testfahrt fährt der Fahrer 270 km auf der Autobahn mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 150 km/h. Außerdem fährt er 72 Minuten auf Feldwegen und in der Stadt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h.
      (1) Wie lange fährt er auf der Autobahn?
      (2) Wie lange dauerte diese Testfahrt insgesamt?
      (3) Wie viele Kilometer fährt er auf Feldwegen und in der Stadt?
      (4) Wie hoch war die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Testfahrt?

5. Andreas, Beate und Dieter spielen ein Kugelspiel mit roten, blauen, weißen und schwarzen Kugeln. Drei weiße Kugeln haben den Wert einer roten, zwei rote Kugeln haben den Wert einer blauen Kugel.

   a) Gib den Wert einer blauen Kugel in weißen Kugeln an.

   b) Andreas gewinnt neun rote und vier weiße Kugeln.
      (1) Gib den Wert seines Gewinns in weißen Kugeln an.
      (2) Er tauscht seine Kugeln in möglichst viele blaue um.
          Wieviel blaue, rote und weiße Kugeln erhält er?

   c) Beate gewinnt 10 blaue und 5 rote Kugeln. Gib den Wert ihres Gewinns in weißen Kugeln an.

   d) Dieter gewinnt 19 weiße, 6 rote und 8 blaue Kugeln. Er tauscht sie in 3 schwarze, 2 blaue und 1 weiße Kugel um. Gib den Wert einer schwarzen Kugel in blauen Kugeln an.

W A H L A U F G A B E N

6. Hans hat einen Baukasten mit quaderförmigen Bausteinen. Jeder Baustein ist 9 cm lang, 6 cm breit und 3 cm hoch.

   a) Berechne das Volumen eines Bausteins.

   b) Berechne die Oberfläche eines Bausteins.

   c) Die Bausteine werden in einen Kasten mit den Innenmaßen 45 cm, 24 cm und 9 cm gesetzt. Wie viele Bausteine passen in diesen quaderförmigen Kasten genau hinein?

   d) Aus den Bausteinen soll ein möglichst kleiner Würfel zusammengesetzt werden.
      (1) Wie groß ist die Kantenlänge dieses Würfels?
      (2) Wie viele Bausteine werden hierfür benötigt?

   e) Ein Baustein soll in möglichst wenige Würfel zerlegt werden.
      (1) Wie groß ist dann die Kantenlänge eines solchen Würfels?
      (2) Gib die Anzahl der Würfel an.

   f) Ein Baustein wird in Würfel mit einer Kantenlänge von 1,5 cm zerlegt.
      Gib die Anzahl der Würfel an.

7. a) Ein Stadion hat 48 000 Plätze. Es werden Eintrittskarten in drei verschiedenen Preisgruppen angeboten. $\frac{3}{5}$ der Plätze gehören zur Preisgruppe III. $\frac{7}{20}$ der Plätze gehören zur Preisgruppe II. Die restlichen Plätze gehören zur Preisgruppe I
   Berechne die Anzahl der Plätze (1) in der Preisgruppe III
   (2) in der Preisgruppe II
   (3) in der Preisgruppe I

   Bestimme den Bruchteil der Karten, die in Preisgruppe I angeboten werden.

   b) Eine Karte der Preisgruppe II kostet 20 DM.
      (1) Eine Karte der Preisgruppe I ist um $\frac{4}{5}$ teurer als eine Karte der Preisgruppe II.
          Was kostet eine Karte der Preisgruppe I?
      (2) Eine Karte der Preisgruppe III ist um $\frac{3}{8}$ billiger als eine Karte der Preisgruppe II.
          Was kostet eine Karte der Preisgruppe III?

   c) $\frac{7}{10}$ der Karten, die beim letzten Heimspiel verkauft wurden, waren aus der Preisgruppe III. $\frac{7}{8}$ der restlichen Zuschauer hatten Karten der Preisgruppe II.
   Von den Karten der Preisgruppe I wurden 1 125 Karten verkauft.
   Wie viele Zuschauer waren bei diesem Spiel im Stadion?