MATHEMATIK-WETTBEWERB 1985/86 DES LANDES HESSEN 3. RUNDE

AUFGABEN DER GRUPPE A

1. Gib zu den folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen jeweils die Lösungsmenge in aufzählender Form an; G = Z.

   a) $2x - 3 = 5$

   b) $2x - 3 = -5$

   c) $(2x - 3)^2 = 49$

   d) $(2x - 3)^2 = x^2$

   e) $(2x - 3)^2 = (x - 9)^2$

   f) $(5x - 4)^2 > 16$

2. Die folgenden Aufgaben sind auf dem Lösungsbogen zu bearbeiten.

   a) Konstruiere einen Kreis durch die Punkte A, B, C.

   b) Konstruiere einen Kreis durch die Punkte A und B, der die zu AB parallele Gerade g berührt.

   c) (1) Konstruiere einen Kreis, der die Parallelen g und h sowie die Gerade f berührt.
      (2) Konstruiere eine Parallele zu f, die den eingezeichneten Kreis berührt. Zeige, daß das entstehende Parallelogramm vier gleich lange Seiten besitzt.

---

3. a) Vertauscht man die Einer- und Zehnerziffer einer zweistelligen Zahl a, so erhält man ihre 'Spiegelzahl' a*.
   Z.B.: a = 30 a* = 03

   (1) Zeige, daß die Differenz $a - a^*$ immer ein ganzzahliges Vielfaches von 9 ist.

   (2) Zeige, daß $(a - a^*)(a + a^*)$ immer ein ganzzahliges Vielfaches von 99 ist.

   b) Vertauscht man die Einer- und Hunderterziffer einer dreistelligen Zahl a, deren Hunderterziffer größer als die Einerziffer ist, so erhält man ihre 'Spiegelzahl' a*.

   (1) Zeige, daß die Differenz $a - a^*$ ein ganzzahliges Vielfaches von 99 ist.

   (2) Warum ist die mittlere Ziffer der Differenz $a - a^*$ jeweils eine '9' ?

   (3) Bildet man zur Differenz $a - a^*$ (siehe (1)) deren 'Spiegelzahl' und addiert beide Zahlen, so erhält man immer 1089. Beweise dies!

4. Beweise die folgenden Aussagen!

   a) Halbieren die Diagonalen eines Vierecks die Innenwinkel, so sind die Seiten des Vierecks gleich lang.

   b) Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

5.

START	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	....

Die Felder eines Spielfeldes sind von 1 bis 64 numeriert. Die Spieler werfen abwechselnd mit einem Würfel.Die Spielsteine werden jeweils entsprechend der Augenzahl vorgerückt.

a) Ein Spieler würfelte nur die Augenzahlen 5 und 6. Welche der ersten 20 Felder kann er dabei erreicht haben?

b) Ein Spieler würfelte 6 mal und erreichte das 34. Feld. Wie viele verschiedene Wurffolgen führen zu diesem Feld?

c) Ein Spieler verwendete einen Würfel, auf dem sich nur die Augenzahlen 1 und 2 befanden.
Wie viele verschiedene Wurffolgen führen vom Start zum

(1) 4. Feld,
(2) 5. Feld,
(3) 6. Feld,
(4) 10. Feld?

6. Herr Grün arbeitet 1600 m von seiner Wohnung entfernt. Nach der Arbeit geht er zu Fuß zurück. Seine Frau geht ihm entgegen. Sie verläßt die Wohnung immer um 16.00 Uhr. Beide gehen durchschnittlich 0,8 m in der Sekunde.

a) Wo und wann treffen sich beide, wenn Herr Grün ebenfalls um 16.00 Uhr losgeht?

b) Herr Grün verläßt erst um 16.10 Uhr die Arbeitsstelle, geht dann aber durchschnittlich 1,2 m pro Sekunde. Wann treffen sich beide?
Welche Strecke ist dann Frau Grün bis zum Treffen gelaufen?

c) Frau Grün wird beim Abholen von ihrem Hund begleitet. Dieser rennt jedoch sofort Herrn Grün entgegen. Nachdem er diesen erreicht hat, rennt der Hund zu Frau Grün zurück, um wiederum zu Herrn Grün zu rennen, u.s.w. bis sich Herr und Frau Grün treffen. Der Hund legt durchschnittlich pro Sekunde eine Strecke von 4 m zurück, er bewegt sich also 5 mal so schnell wie Frau Grün. Welche Strecke hat der Hund bis zum Treffen zurückgelegt, wenn Herr und Frau Grün um 16.00 Uhr losgehen?

7. Am 'Tag der Wahrscheinlichkeit' verteilte ein Briefträger 5 Briefe auf 10 Briefkästen, ohne auf die Adresse zu schauen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurden alle 5 Briefe in denselben Briefkasten geworfen?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurden alle Briefe in verschiedene Briefkästen eingeworfen?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurden alle Briefe richtig eingeworfen?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurden mindestens 2 Briefe richtig eingeworfen?

AUFGABEN DER GRUPPE B

1. Bestimme die jeweilige Lösungsmenge; G = Z

   a) $6(4x + 5) = 3(4x - 2)$

   b) $12 - (3x - 2) = 3(3x - 1) + 8$

   c) $(6x - 5)^2 < 4(3x + 3)^2$

   d) $(12x - 6)(12x + 6) = 8 \cdot \left[(4x)^2 + 3\right] + 4$

2. a) Konstruiere das Dreieck ABC mit $|BC| = 2{,}5$ cm; $\beta = 58°$; $\gamma = 73°$.

   b) Verlängere $\overline{CB}$ über B hinaus, so daß $|BD| = 2 \cdot |BC|$. Ziehe die Parallele zu $\overline{AC}$ durch D. Die Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus schneidet die Parallele in E.

   c) Bestimme die Größe der Winkel $\sphericalangle$ EDB und $\sphericalangle$ DEB ohne zu messen. Begründe!

   d) Zerlege das Dreieck DEB in Dreiecke, die zum Dreieck ABC deckungsgleich sind. Wie viele zu Dreieck ABC deckungsgleiche Dreiecke ergeben sich, wenn

      (1) $|BD| = 3 \cdot |BC|$,
      (2) $|BD| = 7 \cdot |BC|$,
      (3) $|BD| = n \cdot |BC|$ ist und E entsprechend konstruiert wird.

---

3. Addiere jeweils einen Bruch und seinen Kehrbruch. Zähler und Nenner sollen stets ungleiche und teilerfremde natürliche Zahlen sein.

   a) Addiere: (1) $\frac{3}{5} + \frac{5}{3}$ (2) $\frac{17}{8} + \frac{8}{17}$

   b) Addiere: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

   c) Bestimme a und b: (1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{25}{12}$ (2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{205}{42}$

   d) Bestimme alle Lösungen für die Variable x:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{x}{30}$$

4) a) Konstruiere ein Dreieck aus c = 5 cm; a = 6 cm und b = 7,5 cm.

   b) Konstruiere den Mittelpunkt des Inkreises.

   c) Die Seiten a und c berühren den Inkreis in den Punkten E und F. Konstruiere diese Punkte und zeichne den Inkreis.

   d) Die Eckpunkte des Dreiecks ABC haben jeweils gleiche Abstände zu den Berührpunkten, z.B. $|BE| = |BF|$.
   Berechne die Länge der Strecke $|BE|$.

5. Spiritus ist ein Alkohol-Wasser-Gemisch. 90%iger Spiritus besteht aus 90 Teilen Alkohol und 10 Teilen Wasser.

   a) Ergänze die Tabelle:

Spiritusmenge in Litern	65		76
Alkoholanteil in Prozent	92	90	
Alkoholanteil in Litern		76,05	72,2

6. Ein Würfelspiel wird mit 2 Würfeln gleichzeitig gespielt. Die Augenzahl des roten Würfels gibt den Zähler eines Bruches an, die Augenzahl des blauen Würfels den Nenner des Bruches.
Beispiel: roter Würfel: 2; blauer Würfel: 3; Bruchzahl $\frac{2}{3}$

a) Gib alle möglichen Bruchzahlen an, die im Nenner eine 5 haben.

b) Welches ist (1) die kleinste Bruchzahl,
(2) die größte Bruchzahl, die man erreichen kann?

c) Wie viele verschiedene Würfe sind insgesamt möglich?

d) Gib alle Würfe an, deren Bruchzahl den Wert $\frac{1}{2}$ hat.

e) Gib alle Würfe an, bei denen der Wert der Bruchzahl eine natürliche Zahl grösser als 1 ist.

f) Gib alle Würfe an, bei denen der Wert der Bruchzahl größer als $\frac{1}{2}$ und kleiner als 1 ist.

7. a) Eine Teehandlung stellt eine Teemischung aus 3 kg der Sorte A (1 kg zu 24 DM) und 5 kg der Sorte B (1 kg zu 32 DM) her.
Wieviel kostet 1 kg der Mischung?

b) Von 35 kg einer Teesorte werden $\frac{5}{7}$ in 125 g-Päckchen abgepackt, der Rest in 200 g-Päckchen.

(1) Wie viele Päckchen von jeder Sorte erhält man?

(2) Ein 125 g-Päckchen wird für 3,75 DM verkauft. Die Gesamteinnahmen für die 35 kg betragen 1025 DM.
Für wieviel DM wurde ein 200 g-Päckchen verkauft?

c) 23 kg Tee werden in Päckchen zu 125 g, 200 g und 250 g abgepackt. Von jeder Größe wird die gleiche Anzahl Päckchen abgepackt.
Wie viele Päckchen von jeder Größe sind es ?

AUFGABEN DER GRUPPE C

1. Eine Kunststoffspritzerei erhält drei Aufträge zur Herstellung von Kunststoffteilen.

   a) Auftrag A kann von 4 Spritzautomaten in 45 Stunden ausgeführt werden. Es werden 6 Automaten eingesetzt. Wieviel Stunden werden dann für die Ausführung des Auftrags benötigt?

   b) Auftrag B kann von 3 Automaten in 185 Stunden ausgeführt werden. Wieviel Automaten müssen eingesetzt werden, damit Auftrag B in 111 Stunden ausgeführt werden kann?

   c) Auftrag C kann von 7 Automaten in 75 Stunden ausgeführt werden. Es werden zunächst 7 Automaten eingesetzt. Nach 20 Stunden fallen 2 Automaten aus. Wieviel Stunden werden nun insgesamt für die Ausführung von Auftrag C benötigt?

2. a) Zeichne das Rechteck ABCD mit den in der Skizze angegebenen Maßen.

   b) Gib den Flächeninhalt des Rechtecks in cm^2 an.

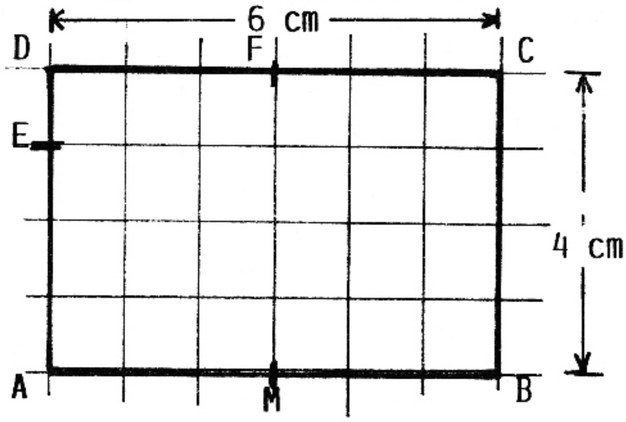
   c) Spiegele das Rechteck ABCD an der Geraden EM und bezeichne die Bildpunkte mit A', B', C' und D'.

      (1) Gib den Flächeninhalt der Gesamtfigur in cm^2 an.

      (2) Gib den Flächeninhalt des gemeinsamen Flächenstücks der Rechtecke ABCD und A'B'C'D' in cm^2 an.

   d) Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks B'BFA.

   e) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks C'BF.

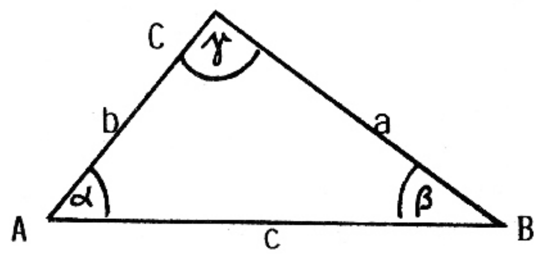


3. Konstruiere Dreiecke aus:

   a) $c = 6$ cm, $\alpha = 55°$, $\beta = 45°$

   b) $c = 6$ cm, $a = 5$ cm, $b = 4$ cm

   c) $c = 6$ cm, $h_c = 3$ cm, $b = 4$ cm



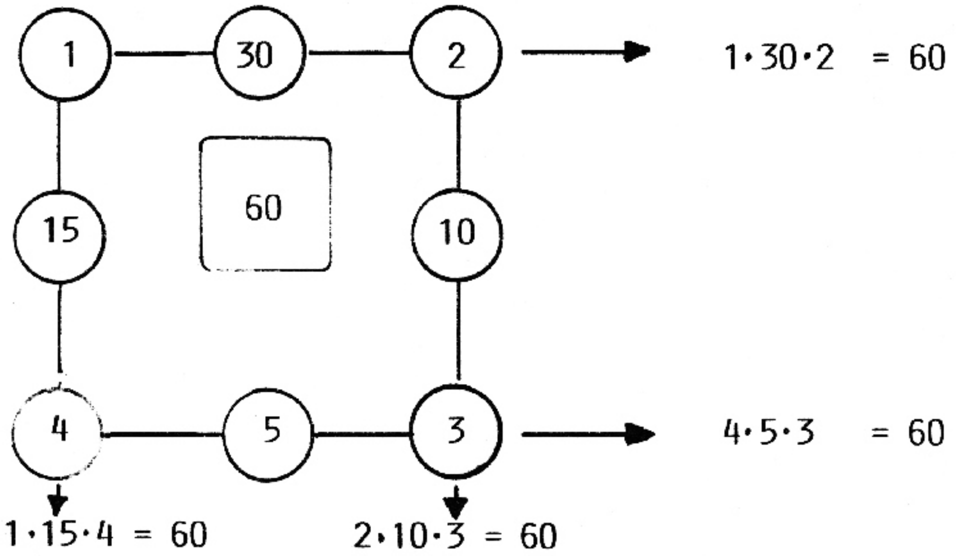
4. a) An einer Schule nahm die Schülerzahl im Jahr 1986 gegenüber dem Jahr 1985 um 15 % ab. 1986 waren es 180 Schüler weniger als 1985.
   Wie viele Schüler besuchten (1) 1985
   (2) 1986 diese Schule?

   b) Eine andere Schule wurde im Jahr 1985 von 1232 Schülern besucht.

      (1) Im Jahr 1985 war die Anzahl der Schüler um 12 % geringer als 1984. Wie viele Schüler besuchten im Jahr 1984 diese Schule?

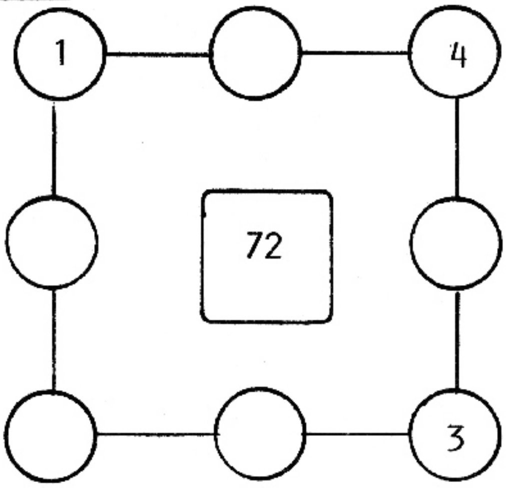
      (2) Im Jahr 1985 war die Anzahl der Schüler um 12 % größer als 1986. Wie viele Schüler besuchen im Jahr 1986 diese Schule?

5. Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 sind Teiler von 60.
8 dieser Teiler sind in der folgenden Figur so angeordnet, daß das Produkt der 3 Zahlen auf einer Seite jeweils 60 ergibt. Jede Zahl darf nur einmal vorkommen.

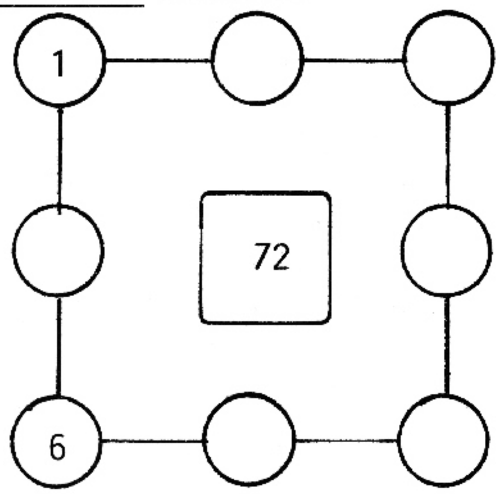


Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 und 72 sind Teiler von 72.
Ordne sie in den folgenden Figuren so an, daß das Produkt der Zahlen auf einer Seite jeweils 72 ergibt.
Beachte: Jede Zahl darf in einer Figur nur einmal vorkommen.

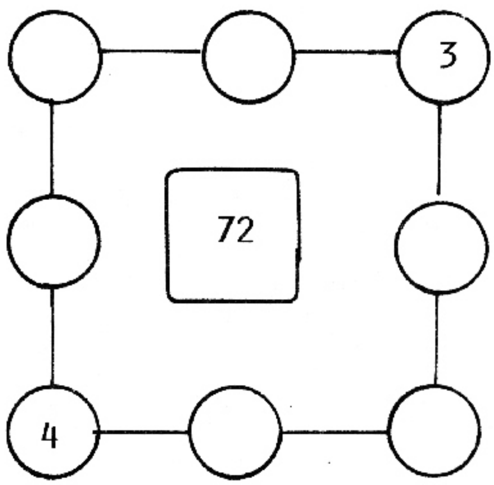
a)



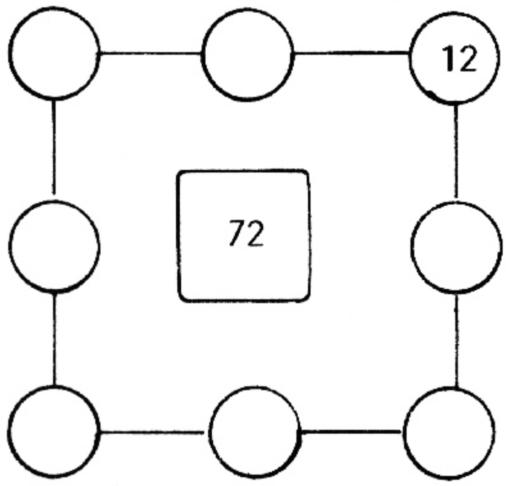
b)



c)



d)



5. b) (1) Aus 84 l 90%igem Spiritus soll durch Zugabe von Alkohol 94%iger Spiritus hergestellt werden. Wieviel Liter von 100%igem Alkohol sind dazu erforderlich?

(2) Aus 84 l 90%igem Spiritus soll durch Zugabe von Wasser 84%iger Spiritus hergestellt werden. Berechne die erforderliche Wassermenge.

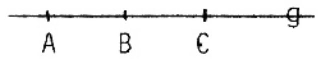
c) 30 l 94%iger und 50 l 90%iger Spiritus werden gemischt. Wieviel Prozent Alkohol enthält die Mischung?

6. a) Für die Lage der Punkte A und B und einer Geraden g zueinander gibt es vier Möglichkeiten: A und B liegen auf g; A und B liegen nicht auf g; A liegt auf g, aber nicht B; B liegt auf g, aber nicht A. Gib die Anzahl der Lagemöglichkeiten an:

Anzahl der Punkte	1	2	3	4	10		n
Anzahl der Lagemöglichkeiten		4				2048	

b) Auf einer Geraden g liegen Punkte. Dadurch werden Strecken gebildet. Wie viele Strecken gibt es?

Beispiel:



$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$

Punkte	2	3	4	5	8		
Strecken		3				15	45

c) Geraden schneiden sich, d.h. jede schneidet jede, aber es gibt keinen gemeinsamen Schnittpunkt von drei oder mehr Geraden. Wie viele Strecken erhält man zwischen benachbarten Schnittpunkten?

Geraden	3	4	5	6	10		n
Strecken		8				440	

7. Sechsunddreißig Münzen sollen wie in der nebenstehenden Grundfigur angeordnet werden. Aus dieser Grundfigur sollen durch Wegnehmen von Münzen andere Figuren erreicht werden.

a) Es sind 6 Münzen so wegzunehmen, daß pro Reihe und Spalte jeweils eine ungerade Anzahl von Münzen liegenbleibt.

b) Es sind 12 Münzen so wegzunehmen, daß pro Reihe und Spalte jeweils 4 Münzen liegenbleiben.

c) Es sind 6 Münzen so wegzunehmen, daß pro Reihe und Spalte jeweils eine gerade Anzahl von Münzen liegenbleibt.

d) 10 Münzen sind so wegzunehmen, daß pro Reihe und Spalte eine gerade Anzahl von Münzen liegenbleibt.

Zeichne zur Lösung jeweils die obige Grundfigur auf und kreuze die wegzunehmenden Münzensymbole an.