MATHEMATIK-WETTBEWERB 1987/88 DES LANDES HESSEN 3. RUNDE

16.5.1988

AUFGABEN DER GRUPPE A

PFLICHTAUFGABEN

1. Gib bei den folgenden Fragen die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an.

   a) Bestimme drei Zahlenpaare $(x|y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$, die Lösungen der folgenden Gleichung sind:
   $$20x - 45y = 0$$

   b) Bestimme alle Zahlenpaare $(x|y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$, die Lösungen der Gleichung
   $$18x - 12y = 30$$
   sind.

   c) Bestimme alle Zahlenpaare $(x|y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$, die Lösungen der Gleichung
   $$5x - 2y = c$$
   sind; dabei ist c eine ungerade natürliche Zahl.

2. a) Zeichne das rechtwinklige Dreieck ABC mit $|BC| = 5$ cm, $|AC| = 8$ cm und $\gamma = 90°$.
   Trage den Winkel BAC an CA in C nach innen ab. Der freie Schenkel schneidet AB in P. Welche Form haben die Dreiecke CAP und PBC? Begründe!
   Berechne die Größe des Flächeninhalts des Dreiecks APC.

   b) Zeichne das Dreieck aus $\gamma = 70°$, $|AC| = 12$ cm und $\alpha = 30°$. Trage entsprechend a) den Winkel CAB an AC in C an. Der freie Schenkel schneidet AB in Q.
   Verändert man die Größe des Winkels α und läßt $|AC|$ sowie γ unverändert, so wandert B auf dem Schenkel des Winkels ACB.
   Wo liegen alle Punkte Q, wenn man die Größe des Winkels α verändert und den veränderten Winkel in C an AC anträgt?

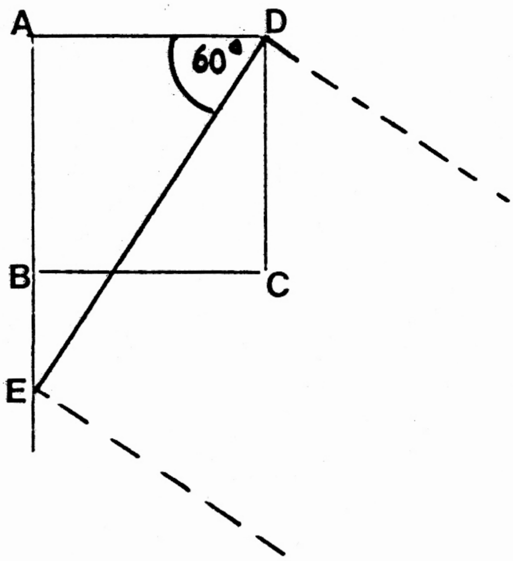
WAHLAUFGABEN

3. a) Ein Förderband läuft von A nach B. A------------------------------B
   B ist 40 m von A entfernt. ------->
   Karl geht mit einer Geschwindigkeit von 1,2 m/s auf dem laufenden Band.

   (1) Geht er mit dieser Geschwindigkeit von A nach B, so benötigt er 20 Sekunden für diese Strecke. Wie schnell läuft das Band?
   (2) Wie lange benötigt er bei gleicher Geschwindigkeit von B nach A?

   b) Auf dem jetzt mit 0,7 m/s nach rechts laufenden Band geht Karl mit 1,5 m/s von A in Richtung B. Uta geht von B in Richtung A mit 1,7 m/s. Beide starten gleichzeitig. Nach welcher Zeit und an welcher Stelle treffen sich beide?

   c) Bei einem anderen Band mit unbekannter Laufgeschwindigkeit und unbekanntem Abstand der Punkte A und B benötigt Harald bei stehendem Band 60 Sekunden für den Weg von A nach B. Bei laufendem Band und gleicher Gehgeschwindigkeit braucht er für den gleichen Weg nur 42 Sekunden. Wie lange benötigt er für den umgekehrten Weg von B nach A?



4. Zeichne ein Quadrat ABCD der Seitenlänge 3 cm sowie das Dreieck AED gemäß Skizze.

   a) Spiegele D an der Geraden AB, benenne den Bildpunkt von D mit D'.
   Bestimme $|D'E|$. Begründe!

   b) Zeichne das Quadrat DEFG.

   (1) Zeige, daß G auf der Geraden BC liegt.
   (2) Unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden BC und EG?
   (3) Zeige, daß B auf dem Thaleskreis über $\overline{DF}$ liegt.

5. a) Bei der Schulsprecherwahl gaben von den 650 Schülern 40% ihre Stimme ab. 55 % der abgegebenen Stimmen entfielen auf Egon. Von wieviel % aller Schüler der Schule wurde Egon gewählt.

b) An einer anderen Schule stellten sich Karl und Verena zur Wahl. 33,75 % aller Schüler der Schule wählten Verena. Es gaben jedoch nur 75 % aller Schüler ihre Stimme ab. Wieviel % der abgegebenen Stimmen entfielen auf Verena?

c) An einer dritten Schule hatten sich Stefan und Sabine zur Wahl gestellt. Stefan errang 45 % der abgegebenen Stimmen, gerade eine Stimme mehr als Sabine. Von den abgegebenen Stimmen waren 25 ungültig. Es nahmen 80 % aller Schüler an der Wahl teil. Wie viele Schüler hat diese Schule?

6. Auf ihrem täglichen Weg zur Arbeit muß eine Autofahrerin zwei Kreuzungen mit Ampeln überqueren. Mit folgender Wahrscheinlichkeit muß sie jeweils eine Anzahl von Rotphasen warten, ehe sie die Kreuzung überqueren kann.

Anzahl der Rotphasen	Ampel 1	Ampel 2
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$

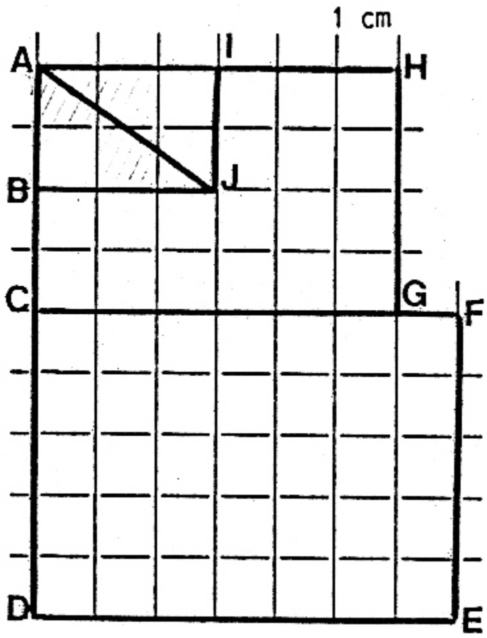
d.h.: An der 2. Ampel muß die Fahrerin mit $p = \frac{1}{3}$ zwei Rotphasen warten, ehe sie die Kreuzung überqueren kann.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?
An beiden Ampeln besteht insgesamt

(1) keine Wartezeit,
(2) genau eine Rotphase Wartezeit,
(3) eine oder zwei Rotphasen Wartezeit,
(4) mindestens zwei Rotphasen Wartezeit,
(5) höchstens drei Rotphasen Wartenzeit.

W
A
H
L
A
U
F
G
A
B
E
N

7. Man betrachtet Rechtecke, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind. Zeichnet man eine Diagonale in einem Rechteck, so wird mit Z die Anzahl der Einheitsquadrate bezeichnet, die von der Diagonalen geteilt werden.
Für das eingezeichnete Rechteck ABJI ist Z = 4 (s. Skizze).



a) Bestimme für das Rechteck ACGH die Anzahl Z.

BEACHTE:
Betrachtet man Rechtecke, die a cm lang und b cm breit sind, wobei a und b teilerfremde Zahlen sind, so gehen die jeweiligen Diagonalen durch keine Gitterpunkte im Inneren der Rechtecke.

b) (1) Bestimme die Anzahl Z für das eingezeichnete Rechteck CDEF.
(2) Bestimme die Anzahl Z für ein Rechteck mit a = 19 und b = 23.
(3) Bestimme die Anzahl Z für ein Rechteck mit a = 55 und b = 77.
(4) Ein Rechteck ist p cm lang, q cm breit; der größte gemeinsame Teiler von p und q ist m. Bestimme die Anzahl Z für dieses Rechteck.

16.5.1988

AUFGABEN DER GRUPPE B

PFLICHTAUFGABEN

1. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an; G = Z.

   a) $2(6x - 2) < 6x + 2$

   b) $(6x - 2)^2 = (6x + 2)6x$

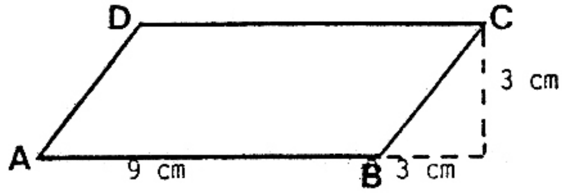
   c) $(6x - 2)(6x + 2) = 32$

   d) $(6x - 2)^2 > (6x + 2)^2$

   e) (1) $(6x + 2)^2 = 36x^2 + 24x$

   (2) $(6x + 2)^2 = 36x^2 + 24x + 4$

2. a) Zeichne das Parallelogramm ABCD mit den in der Skizze angegebenen Maßen und berechne seinen Flächeninhalt.



   b) Spiegele das Parallelogramm ABCD an der Diagonalen BD. Benenne die Bildpunkte mit A', B', C' und D'. Zeichne die Diagonale $\overline{AC}$ und nenne den Schnittpunkt der Diagonalen Z.

   c) Zeichne die zweite Symmetrieachse der Gesamtfigur ein. Benenne den Schnittpunkt dieser Symmetrieachse mit der Seite AB mit E und mit der Seite DC mit F.

   d) Begründe, warum das Viereck EBFD eine Raute (Rhombus) ist.

   e) In einem anderen Parallelogramm ABCD betragen die Winkel DAC 39°, ABC 125° und BDC 26°; Z ist der Schnittpunkt der Diagonalen. Bestimme die Größe der Winkel CZD und CZB.

WAHLAUFGABEN

3. Im 100-m-Lauf stand der Weltrekord lange Zeit auf 10,0 Sekunden (s). Diese Zeit entspricht einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 36 Kilometern pro Stunde (km/h).

   a) Ergänze die Tabelle:

Zeit über 100 m in Sekunden	10,0	12,0	15,0	
Kilometer pro Stunde (km/h)	36,0			28,8

   b) Harald erreicht über 10 000 m eine Zeit von 33 min und 20 s. Berechne seine durchschnittliche Geschwindigkeit.

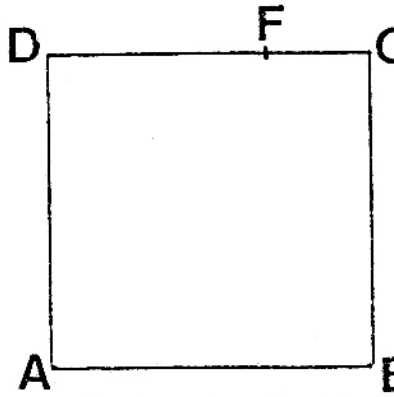
   c) Karl läuft bei den Bundesjugendspielen die 1000 m in 3 min und 20 s. Sein Freund Udo sagt: "Wenn meine durchschnittliche Geschwindigkeit um 10 % geringer wäre, hätten wir die gleiche Zeit erreicht."

   (1) Bestimme die durchschnittliche Geschwindigkeit von Karl (in km/h).

   (2) Bestimme die durchschnittliche Geschwindigkeit von Udo (in km/h).

   (3) Berechne die von Udo erzielte Zeit.

WAHLAUFGABEN



4. In ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm sollen andere Figuren bestimmter Größe eingezeichnet werden, deren Eckpunkte auf den Quadratseiten liegen. Die Punkte A und C sollen jeweils Eckpunkte der einzuzeichnenden Figuren sein.

   a) (1) Die Strecke $\overline{CF}$ ist 2,5 cm lang. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ACF.
      (2) Zeichne ein Dreieck ACE mit einem Flächeninhalt von 7,5 cm^2 in das Quadrat ein. Gib die Länge der Strecke $\overline{CE}$ an.
      (3) Das Dreieck ACG hat einen Flächeninhalt von 1 cm^2. Berechne die Länge von $\overline{CG}$.

   b) Zeichne in ein neues Quadrat (a = 5 cm) ein Drachenviereck AKCL mit einem Flächeninhalt von 10 cm^2 ein.

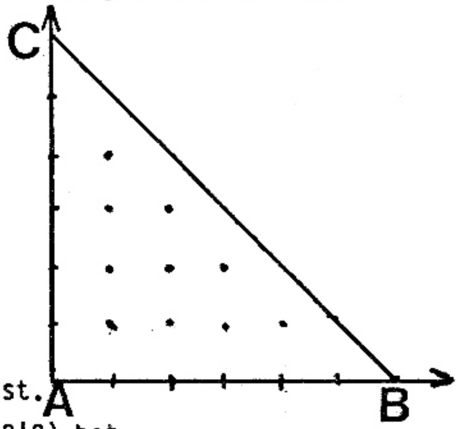
   c) Zeichne in ein neues Quadrat (a= 5 cm) ein symmetrisches Trapez AXYC mit dem Flächeninhalt von 8 cm^2 ein. Gib die Länge von $\overline{AX}$ an.

5. Ein Wasserbecken hat ein Fassungsvermögen von 60 m^3. Es kann von einer Pumpe A in 4 Stunden, von einer Pumpe B in 6 Stunden gefüllt werden.

   a) In welcher Zeit wird es gefüllt, wenn beide Pumpen gleichzeitig arbeiten?

   b) Wegen eines Defektes kann Pumpe B nur mit halber Leistung arbeiten. Wie lange brauchen nun beide Pumpen gemeinsam, um es ganz zu füllen?

   c) Zu Beginn einer Füllung des leeren Beckens stellt man fest, daß Pumpe B repariert werden muß. Nachdem Pumpe A schon 1 Stunde 45 Minuten gearbeitet hat, kann Pumpe B mit voller Leistung zugeschaltet werden. Wie lange muß die erste Pumpe insgesamt laufen, bis nun das Becken ganz gefüllt ist?



6. a) Zeichne ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm und trage die Punkte A(0|0), B(6|0) und C(0|6) ein.
      (1) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?
      (2) Wie viele Gitterpunkte (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) liegen im Inneren des Dreiecks?

   b) Beantworte die Fragen a.(1) und a.(2), wenn (1) A(0|0), B(16|0), C(0|16)
      (2) A(0|0), B(101|0), C(0|101) ist.

   c) Ein ähnliches gleichschenkliges Dreieck mit A(0|0) hat
      (1) einen Flächeninhalt von 288 cm^2. Gib die Koordinaten von B und C an.
      (2) 136 Gitterpunkte. Gib die Koordinaten von B und C an.

7. Die Verknüpfung # ist für die Grundmenge G = Z wie folgt festgelegt:

$$a \# b = a^2 \cdot b + a$$

BEISPIEL: $5 \# 3 = 5^2 \cdot 3 + 5 = 25 \cdot 3 + 5 = 80$

   a) Berechne entsprechend:
      (1) $2 \# 3$
          $3 \# 0$
          $-2 \# 3$
      (2) $(3 \# 1) + (1 \# 3)$
          $(n \# 1) + (1 \# n)$

   b) Gib jeweils die Lösungsmenge an.
      (1) $2 \# x = 22$
          $-2 \# x = -2$
      (2) $x \# x = 10$
          $x \# x = -2$

   c) Für welche x und y gilt: $x \# y = 4$?
      Gib eine Lösung an.

16.5.1988

AUFGABEN DER GRUPPE C

PFLICHTAUFGABEN

1. Für eine Fahrt berechnen Taxiunternehmen eine Grundgebühr von 2,50 DM und pro km 1,20 DM.

   a) Wieviel DM sind für eine Fahrt von 6,5 km insgesamt zu zahlen?

   b) Herr Kaiser bezahlte für eine Fahrt 17,50 DM.
   Wieviel km betrug die Fahrtstrecke?

   c) Das Unternehmen A erhöht den Kilometer-Preis um 25 %; die Grundgebühr bleibt unverändert.
   Wieviel DM kostet jetzt eine Fahrt von 15 km?

   d) Das Unternehmen B erhöht die Grundgebühr um 0,50 DM und den Kilometer-Preis um 0,20 DM.
   Bei welcher Fahrtstrecke ist der Gesamtfahrpreis bei den Unternehmen A und B gleich?

2. Ein Quader ist 20 cm lang, 15 cm breit und 10 cm hoch.

   a) (1) Berechne sein Volumen.
   (2) Berechne seine Oberfläche.

   b) Alle Kanten werden um jeweils 5 cm gekürzt.
   Gib das Volumen des neuen Quaders als Bruchteil des Volumens des ursprünglichen Quaders an.

   c) Eine würfelförmige Kiste (Innenkante a = 1,20 m) wird mit Quadern gefüllt, die 20 cm lang, 15 cm breit und 10 cm hoch sind.

   (1) Wie viele dieser Quader passen in eine Kiste?

   (2) Die würfelförmige Kiste soll mit Quadern gefüllt werden, deren Kanten jeweils halb so lang sind wie die des ursprünglichen Quaders.
   Wie viele dieser kleineren Quader werden benötigt?

WAHLAUFGABEN

3. a) Klaus ist 15 Jahre, Dieter 13 Jahre und Petra 9 Jahre alt.
   In wieviel Jahren werden sie zusammen 100 Jahre alt sein?

   b) In 5 Kisten befinden sich jeweils gleich viele Äpfel. Entnimmt man jeder Kiste 40 Äpfel, so bleiben in den Kisten insgesamt so viele Äpfel übrig, wie vorher in 3 Kisten waren. Wie viele Äpfel waren vorher in jeder Kiste?

   c) Rudi hat für eine Urlaubsreise gespart. Bei dem geplanten Tagessatz reicht sein Geld für 18 Tage Urlaub. Da er jedoch täglich 3 DM mehr ausgibt als geplant, reicht sein Geld nur für 16 Tage.
   Wieviel DM hatte er gespart?

4. Gib die jeweilige Lösungsmenge an. Grundmenge $G = \mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

   a) $7 \cdot x + 14 = 5 \cdot x + 22$

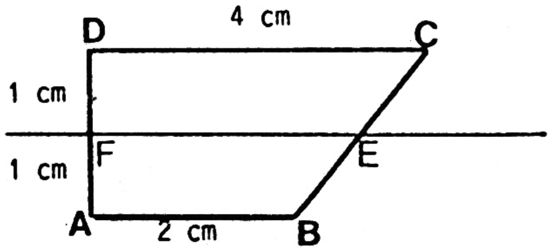
   b) $7 \cdot (x + 14) = 5 \cdot (x + 22)$

   c) $7 \cdot (x - 14) = 5 \cdot (x - 22)$

   d) $7 \cdot x + 14 > 5 \cdot (x + 22)$

   e) $7 \cdot (x - 14) < 5 \cdot (x + 22)$

   f) $7 \cdot (x - 14) > -5 \cdot (x + 22)$



5. a) (1) Zeichne das Viereck ABCD mit den in der Skizze angegebenen Maßen.

(2) Gib den Flächeninhalt des Vierecks ABCD in cm^2 an.

b) (1) Spiegele das Viereck an der Geraden BD.

(2) Gib den Flächeninhalt des gemeinsamen Flächenstücks von Original und Bild in cm^2 an.

(3) Gib den Flächeninhalt der Gesamtfigur in cm^2 an, ohne zu messen.

(4) Wie lang müssen in einem entsprechenden Viereck $A_1B_1C_1D_1$ die Seiten $\overline{A_1D_1}$ und $\overline{C_1D_1}$ sein, damit nach der Spiegelung an $\overline{B_1D_1}$ der Flächeninhalt der Gesamtfigur 18 cm^2 beträgt?

c) (1) Spiegele die Gesamtfigur (siehe b(3)) an der Geraden EF.

(2) Gib den Flächeninhalt der neuen Gesamtfigur in cm^2 an, ohne zu messen.

WAHLAUFGABEN

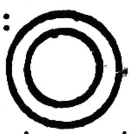
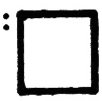
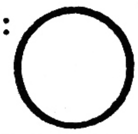
6. a) Ein Rennrad kostete bisher 840 DM. Dieser Preis wurde um 15 % gesenkt. Berechne den neuen Preis.

b) Der Preis eines Walkman wurde um 18 % gesenkt, das sind 22,50 DM. Berechne den ursprünglichen Preis.

c) Nach einer Preissenkung von 330 DM kostet eine Stereoanlage 1870 DM. Wieviel % betrug die Preissenkung?

d) Ein Paar Turnschuhe kostete im Februar 150 DM. Der Preis wurde im März um 8 % erhöht. Im Juli wurde der neue Preis beim Sommer-Schluß-Verkauf um 25 % gesenkt. Wieviel kosteten die Schuhe im Sommer-Schluß-Verkauf?

7. Ein Spiel wird mit 4 verschiedenen Spielmarken gespielt, die unterschiedliche Werte haben:

RING:  DREIECK:  QUADRAT:  KREIS: 

a) Andrea erhält für 13 Ringe und 3 Dreiecke insgesamt 1 Ring und 7 Dreiecke. Wie viele Ringe benötigt man für ein Dreieck?

b) Bernd hat 2 Ringe, 3 Dreiecke und 2 Quadrate. Er gewinnt dazu 4 Ringe und 5 Dreiecke. Er tauscht alle Spielmarken um und besitzt dann 4 Quadrate. Wie viele Ringe benötigt man für ein Quadrat?

c) Christof erhält für 9 Ringe, 3 Dreiecke und 2 Quadrate insgesamt 2 Kreise. Wie viele Dreiecke benötigt man für einen Kreis?

d) Dirk hat am Spielende nur Quadrate. Er tauscht sie alle um und erhält dafür 5 Kreise. Wie viele Quadrate hatte er?