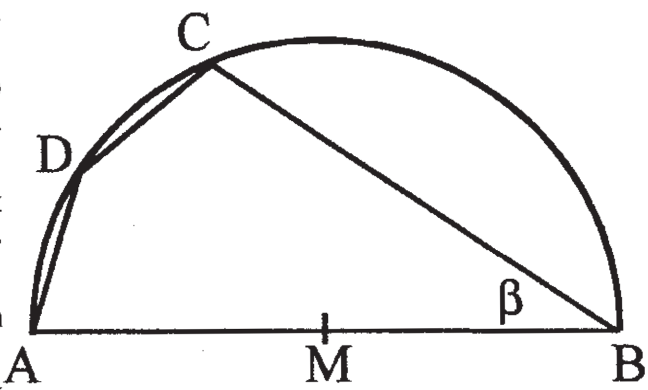
A MATHEMATIK-WETTBEWERB 1994/95 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE A

PFLICHTAUFGABEN

1. Bestimme die jeweilige Lösungsmenge; $G = \mathbb{Z}$.
   a) $(x + 5)(x - 5) = (x + 5)^2$
   b) $(x - 5)^2 < 900$
   c) $(x + 3)(x - 4) > 0$
   d) $x^2 - 25 - (x - 5) < 0$

2. Die Punkte C und D des Vierecks ABCD liegen auf dem Halbkreis über $\overline{AB}$.
   a) (1) Konstruiere das Viereck ABCD mit $|AB| = 12$ cm, $\beta = 40°$, und $|AD| = |DC|$.
   (2) Berechne die Größe des Winkels $\measuredangle CMD$ und die Größe der Innenwinkel des Vierecks ABCD.
   (3) Zeichne die Diagonale BD in das Viereck ABCD und begründe, daß BD den Winkel β halbiert.
   (4) Begründe, daß das Viereck MBCD ein Trapez ist.



   b) In einem entsprechend konstruierten Viereck ABCD mit $|AB| = 12$ und $|AD| = |DC|$ ist das Viereck MBCD ein Parallelogramm. Wie groß ist β? Begründe !

WAHLAUFGABEN

3. a) $3x = 61 - 5y$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$.
   (1) Gib drei Zahlenpaare $(x|y)$ an, die diese Gleichung lösen.
   (2) Für welche ganzzahligen y gibt es Lösungen?
   Beachte, daß x auch ganzzahlig ist. Begründe!

   b) $3x = 100 - 4y^2$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$.
   (1) Gib fünf Zahlenpaare $(x|y)$ an, die diese Gleichung lösen.
   (2) Begründe: Ist $(x|y)$ Lösungspaar dieser Gleichung, so kann y kein ganzzahliges Vielfaches von 3 sein.

4. a) Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A(3|4)$ und $B(8|2)$ sowie die Gerade g durch den Punkt B und den Koordinatenursprung. Konstruiere einen Kreis durch die Punkte A und B, der die Gerade g berührt.
   b) Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A(3|4)$ und $B(8|2)$ sowie die Gerade g, die senkrecht auf AB steht und durch den Punkt $C(10{,}5|1)$ geht. Konstruiere einen Kreis durch die Punkte A und B, der die Gerade g berührt.
   c) Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A(3|4)$ und $B(8|2)$ sowie die Parallele g zu AB durch den Punkt $D(3|13)$. Konstruiere einen Kreis durch die Punkte A und B, der die Parallele g berührt.

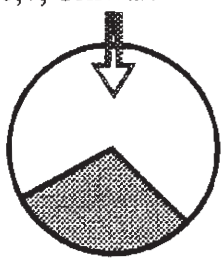
5. Die Zahlen $a(1) = \frac{1}{2}$, $a(2) = \frac{1}{4}$, $a(3) = \frac{1}{8}$, $a(4) = \frac{1}{16}$, ... bilden die ersten 4 Glieder einer Folge.
   a) (1) Gib das 10. Glied dieser Folge an.
   (2) Wie groß muß n mindestens sein, damit das n-te Glied dieser Folge kleiner als $\frac{1}{6000}$ ist.
   b) (1) Berechne
   $a(1) + a(2) + a(3) + a(4)$
   $a(1) + a(2) + a(3) + a(4) + a(5)$
   (2) Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Folgegliedern ist $\frac{1}{16} \cdot \frac{15}{16}$. Gib diese Folgeglieder an.
   (3) Multipliziert man jedes Glied der Folge mit x, so beträgt die Summe der ersten 10 Glieder dieser Folge 3069. Berechne x!

WAHLAUFGABEN

6. Die Zahl t ist Teiler von n, wenn n ein Vielfaches von t ist; t, n $\in \mathbb{N}$.
   Beispiel: 20 hat die 6 Teiler 1, 2, 4, 5, 10, 20.

   a) (1) Wie viele Teiler besitzt die natürliche Zahl $n = 2^3 \cdot 5^2$?
   (2) Wie viele Teiler besitzt die natürliche Zahl $n = 5^{11} \cdot 7^{12}$?
   b) (1) Wie viele Teiler besitzt die natürliche Zahl $n = p^x \cdot q^y$, wobei p und q Primzahlen sind und x, y $\in \mathbb{N}$?
   (2) Wann ist die Anzahl der Teiler von $n = p^x \cdot q^y$ ungerade?
   c) (1) Berechne die <u>Summe</u> der Teiler von 5^2.
   (2) Begründe: Die <u>Summe</u> der Teiler von 5^{10} ist ungerade.

7. **BEACHTE: Die Lösungen zu den folgenden Fragen können auch als Summe oder Produkt angegeben werden.**
   Beim Drehen eines Glücksrades erscheint weiß mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,7, schwarz mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,3.
   a) Das Glücksrad wird 6 mal gedreht.
   (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß schwarz genau 5 mal erscheint ?
   (2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Farben abwechselnd erscheinen?
   (3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß weiß weniger oft als schwarz erscheint ?



   b) Mit dem Glücksrad wird das Rücken eines Spielsteines verbunden, der auf dem Feld 7 startet. Zeigt das Glücksrad schwarz, so wird der Spielstein um 1 nach rechts gesetzt, bei weiß um 1 nach links. Das Spiel ist beendet, wenn der Spielstein die Felder 1 oder 11 erreicht.

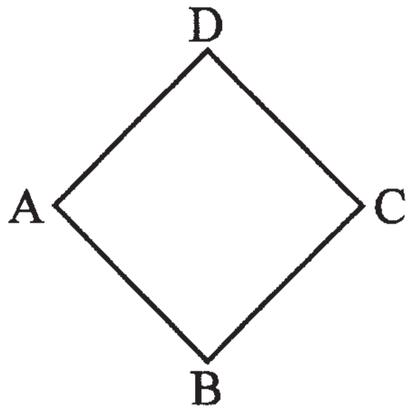
   (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Spielstein nach viermaligem Drehen des Glücksrades das Feld 9 erreicht?
   (2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Spielstein genau nach sechsmaligem Drehen des Glücksrades die Felder 1 oder 11 erreicht?

B MATHEMATIK-WETTBEWERB 1994/95 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE B

PFLICHTAUFGABEN

1. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an; $G = \mathbb{Z}$.
   a) $12x - 45 = 7\cdot(4x + 5)$
   b) $12\cdot(x - 5) > 7\cdot(4x - 5) + 7$
   c) $4\cdot(4x^2 - 5) < (4x - 5)^2$
   d) $4x\cdot(2x - 1) - 18 = (4x + 5)\cdot(4x - 5) - (4x - 5)$



2. a) (1) Zeichne das Quadrat ABCD, dessen Diagonalen 12 cm lang sind. Der Schnittpunkt der Diagonalen ist M.
   (2) Berechne den Flächeninhalt des Quadrats.
   b) (1) Zeichne die Mittelsenkrechte auf $\overline{MD}$. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit $\overline{MD}$ ist H und mit $\overline{AD}$ ist F.
   (2) Spiegele F an AC. Benenne den Bildpunkt von F mit F'.
   c) Berechne den Flächeninhalt des Drachenvierecks AF'CF.
   d) Zeichne die Parallele zu AD durch H. Der Schnittpunkt mit AC ist G.
   e) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks AGHD (ohne zu messen).

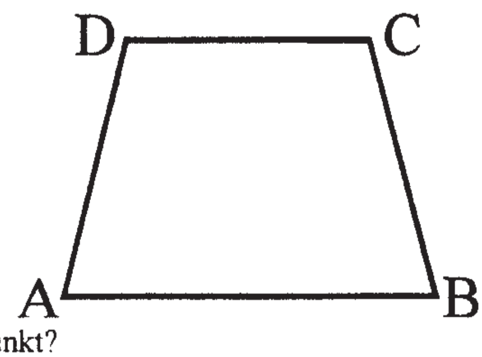
WAHLAUFGABEN

3. Die 4 Parteien A, B, C und D erzielten in einem Wahlkreis folgendes Wahlergebnis:

Partei A	3840 Stimmen
Partei B	39 % der gültigen Stimmen
Partei C	1152 Stimmen
Partei D	864 Stimmen

   a) (1) Wie viele Stimmen erhielt die Partei B?
   (2) Wieviel Prozent der gültigen Stimmen erhielt die Partei A?
   b) Vergleiche die Anzahl der Stimmen der Parteien C und D.
   (1) Wieviel Prozent erhielt die Partei C mehr als die Partei D?
   (2) Wieviel Prozent erhielt die Partei D weniger als die Partei C?
   c) Die Wahlbeteiligung betrug in diesem Wahlkreis 75 %. Von den abgegebenen Stimmen waren 96 % gültig. Wieviel % aller Wahlberechtigten gaben eine gültige Stimme ab?

4. a) Konstruiere ein Trapez ABCD ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$) aus $|AD| = |BC| = |CD| = 5$ cm; $\gamma = \delta = 108°$. Zeichne die Diagonale $\overline{BD}$ ein.
   b) Berechne die Größe der Winkel $\measuredangle BDC$ und $\measuredangle BAD$.
   c) Spiegele das Trapez an BD und benenne die Bildpunkte mit A', B' C' und D'.
   Betrachte die Punkte A, C', B, C, A' und D. Jeweils drei dieser Punkte sind Eckpunkt eines Dreiecks. Welche dieser Dreiecke sind gleichschenklig? Gib 8 Möglichkeiten an!



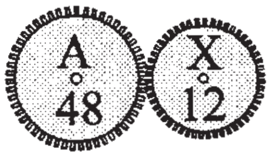
   d) (1) Das Dreieck DC'B soll durch eine Drehung auf das Dreieck BCD abgebildet werden. Wo liegt der Drehpunkt?
   (2) Das Dreieck AC'D soll durch eine Drehung auf das Dreieck DCA' abgebildet werden? Wie groß ist der Drehwinkel?

5. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an; $G = \mathbb{Z}$.
   a) $x \cdot (x^2 - 8) = 0$
   b) $-2 \cdot (x^2 - 8) = 0$
   c) $(x - 2) \cdot (x^2 - 8) = 0$
   d) $(x - 2) \cdot (x^2 - 8) = -5 \cdot (x^2 - 8)$
   e) $(x - 2) \cdot (x^2 - 8) = (x - 2)$

WAHLAUFGABEN

6. a) (1) Um wieviel Grad wandert der große Zeiger einer Uhr in 20 Minuten?
   (2) Um wieviel Grad wandert der kleine Zeiger einer Uhr in 20 Minuten?
   b) (1) Welchen Winkel bilden die beiden Zeiger um 15.45 Uhr?
   (2) Welchen Winkel bilden die beiden Zeiger um 8.13 Uhr?
   c) Um 12.00 Uhr stehen beide Zeiger übereinander. Nach wieviel Minuten bilden sie zum ersten Mal einen Winkel von 44°?

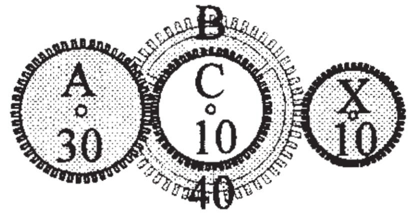
7. Die Abbildungen zeigen miteinander verbundene Zahnräder. Die Anzahl der Zähne ist auf den Zahnrädern angegeben.
   a) Das Zahnrad A dreht sich einmal um 360°. Wieviel mal dreht sich jeweils das Rad X?



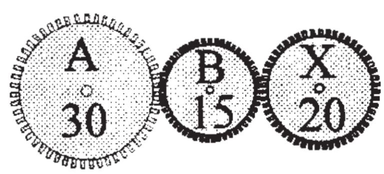
(1)

(2)

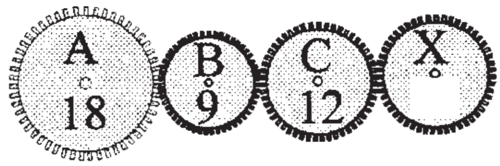
   b) Zahnrad A dreht sich einmal um 360°. Die Zahnräder B und C haben eine gemeinsame Achse. Wieviel mal dreht sich das Zahnrad X?



   c) Zahnrad A macht 6 Umdrehungen. Wie oft dreht sich dann das Zahnrad X?



   d) Wie viele Zähne hat das Zahnrad X, wenn es sich dreimal so oft dreht wie das Zahnrad A?



C MATHEMATIK-WETTBEWERB 1994/95 DES LANDES HESSEN

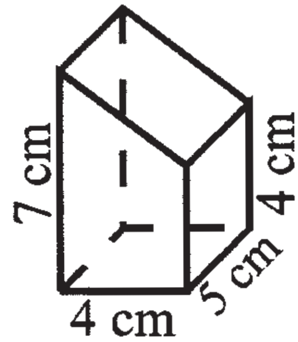
AUFGABEN DER GRUPPE C

PFLICHTAUFGABEN

1. a) Ein Güterzug fährt in 4 Stunden eine Strecke von 180 km. Welche Strecke legt dieser Zug bei gleicher Durchschnittsgeschwindigkeit in 100 Minuten zurück?
   b) Ein Eilzug benötigt für eine Strecke von 84 km 72 Minuten. Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h.
   c) Ein D-Zug benötigt für die Fahrt von A-Stadt nach B-Hausen $2\frac{1}{2}$ Stunden bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 90 km/h. Wie lange braucht ein ICE für diese Strecke bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 150 km/h?
   d) Ein Interregio-Zug legt die Strecke von C-Dorf nach D-Burg bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 96 km/h fahrplanmäßig in 45 Minuten zurück. Heute sollen auf dieser Strecke 5 Minuten Verspätung aufgeholt werden. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit (km/h) muß der Zug heute fahren?

2. a) Ein Holzquader ist 36 cm lang, 24 cm breit und 20 cm hoch.
   (1) Berechne das Volumen dieses Quaders.
   (2 Berechne die Oberfläche des Quaders.
   (3) In wie viele Würfel mit der Kantenlänge a = 4 cm könnte man diesen Quader zersägen?

   b) Berechne das Volumen des abgebildeten Körpers.



WAHLAUFGABEN

3. a) In einem Quadrat soll die **Summe** der 3 Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich groß sein.

   Beispiel:

8	3	9	
2	11	7	⇨ 20
10	6	4	
	⇩ 20		

   Zeichne die Quadrate ab und trage die fehlenden Zahlen ein.

-5	-4		
	10	-7	⇨ 0

-4	3	-2	
	-1		⇨ □
0			

   b) In einem Quadrat soll das **Produkt** der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich groß sein. Zeichne die Quadrate ab und trage die fehlenden Zahlen ein.

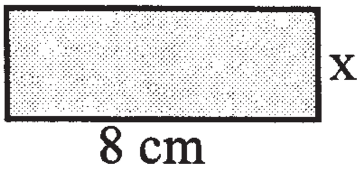
-2	10	-3	
	3		⇨ □
6			

-15	-2		⇨ -120
		10	
	-5		

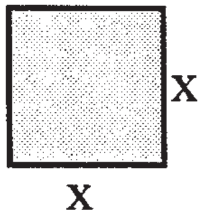
C **3. RUNDE** **10.5.1995**

4. Gib jeweils die Länge der Strecke x an, wenn jede grau schraffierte Fläche einen Flächeninhalt von 36 cm^2 hat.

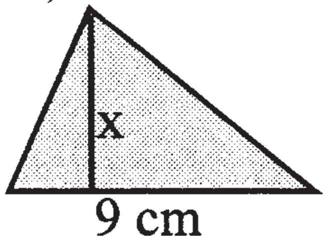
a)



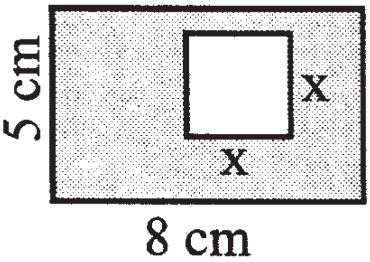
b)



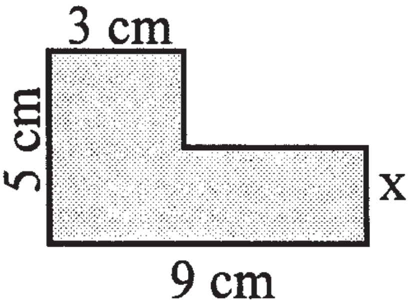
c)



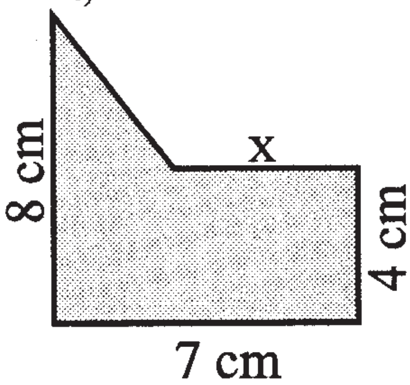
d)



e)



f)



5. a) Peter kauft 40 Briefmarken im Gesamtwert von 7,00 DM. Es sind nur 10-Pf- und 20-Pf-Marken. Wie viele 10-Pf-Marken, wie viele 20-Pf-Marken kauft er?
   b) Frau Meier kauft für 250,00 DM Briefmarken. Sie bezahlt mit insgesamt 10 Geldscheinen, es sind nur 50-DM-, 20-DM- und 10-DM-Scheine. Wie viele Scheine von jeder Sorte sind es? Es gibt zwei Lösungen; gib sie beide an.
   c) Katja kauft für 30 DM Briefmarken; es sind gleich viele 20-Pf-, 50-Pf- und 80-Pf-Marken. Wie viele Briefmarken kauft sie insgesamt?
   d) Herr Müller kauft für 45,00 DM Briefmarken. Es sind doppelt so viele 50-Pf-Marken wie 80-Pf-Marken. Wie viele Briefmarken jeder Sorte sind es?

W A H L A U F G A B E N

6. Bestimme jeweils die Lösungsmenge; Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
   a) $7x + 17 = 59$
   b) $5 \cdot (x - 3) = 35 + 3x$
   c) $3 \cdot (5x + 5) = 6 \cdot (4x - 5)$
   d) $3 \cdot (4x + 7) < -3$
   e) Wenn man das Dreifache einer Zahl x um 6 vermehrt, so erhält man das Fünffache der Zahl x, vermindert um 12.
   Stelle zunächst eine Gleichung auf und berechne dann x!

7. a) Ein Fernsehgerät kostete bisher 800 DM. Der Preis wird im Januar um 20 % herabgesetzt.
   (1) Wieviel DM kostet das Gerät nach dieser Preissenkung?
   (2) Der neue Preis wird im Mai nochmals um 10 % herabgesetzt. Wieviel DM kostet das Gerät nach der 2. Preissenkung?
   (3) Um wieviel Prozent wurde der Preis des Gerätes <u>insgesamt</u> herabgesetzt?
   b) Nach einer Preiserhöhung um 7 % kostet ein Videorecorder 428 DM. Wieviel DM kostete er vor der Preiserhöhung?
   c) Eine Stereoanlage kostet im Großhandel 2000 DM. Dazu kommt die Mehrwertsteuer von 15 %. Auf den Preis einschließlich Mehrwertsteuer gewährt der Händler einen Preisnachlaß von 3 %. Was kostet die Stereoanlage nun?