

MATHEMATIK-WETTBEWERB 1995/96 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE A

P
F
L
I
C
H
T
A
U
F
G
A
B
E
N

1. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an ; $G = \mathbb{Z}$.

a) $(x - 10)^2 (10 + x)^4 = 0$

b) $(x + 10)^2(2x + 10) = 81(2x + 10)$

c) $(x + 8)(x - 8)^4 < 0$

d) $(x + 8)(x - 10) < 0$

2. a) Zeichne das gleichschenklige Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$; $\gamma = 40^\circ$ und $|AC| = |BC|$. Spiegele den Mittelpunkt M von \overline{AB} an der Geraden CB und bezeichne den Bildpunkt mit E. Spiegele M an CA und bezeichne den Bildpunkt mit D. Die Geraden DA und EB schneiden sich in F.

(1) Berechne die Größe des Winkels $\varepsilon = \angle BFA$.

(2) Begründe, daß das Viereck DFEC einen Umkreis hat.

b) (1) Wie ist in einer entsprechenden Figur der Winkel γ zu wählen, daß $\varepsilon = \gamma$ gilt?

(2) Wie ist in einer entsprechenden Figur der Winkel γ zu wählen, daß $DA \parallel EB$ gilt ?

3. Für eine Zahl x gibt $|x|$ den Abstand an, den diese Zahl vom Nullpunkt der Zahlengeraden hat.

zum Beispiel: $|-3| = 3$ $|5| = 5$ $|-2,4| = 2,4$

Gib zu den folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen jeweils die Lösungsmenge in aufzählender Form an; $G = \mathbb{Z}$.

a) $|x - 5| = 8$

b) $|x + 6| = |x|$

c) $|x^2| = |x|^2$

d) $|x - 3| + |x - 4| = 7$

e) $|x^2 - 100| = |x^2| - 100$

W
A
H
L
A
U
F
G
A
B
E
N

4. In einer Anzeige bot ein Computer-Händler verschiedene Artikel an.

a) Ein Computer wird darin um 600 DM teurer als ein dazugehöriger Monitor angeboten. Der Händler reduziert im nächsten Monat alle Preise um 5 %. Dadurch zahlt René nur insgesamt 3040 DM. Berechne die ursprünglichen Preise.

b) Joachim wählt einen Computer aus, dessen Preis laut Anzeige dreimal so hoch wie der des Druckers ist. Nach einer Preiserhöhung von 10 % für den Computer und einer Preissenkung um 10 % für den Drucker zahlt Joachim insgesamt 6720 DM. Berechne die ursprünglichen Preise.

c) Rainer interessiert sich für einen Computer, einen Monitor und Software. Die Software ist laut Anzeige um 1000 DM billiger als der Monitor, der Computer um 2500 DM teurer als der Monitor. Obwohl inzwischen die Preise für den Monitor und die Software um 20 % erhöht wurden, der Preis für den Computer jedoch um 10 % gesenkt wurde, entscheidet sich Rainer für den Kauf, da sich der Gesamtpreis nicht geändert hat. Berechne die ursprünglichen Preise.

5. a) Zeichne in ein Koordinatensystem den Kreis K mit dem Mittelpunkt $M(0|0)$ und dem Radius $r = 3$ cm ein. Konstruiere alle Kreise mit dem Radius $r = 4$ cm, die den Kreis K in $T(0|3)$ berühren.
- b) Zeichne erneut den Kreis K mit $M(0|0)$ und $r = 3$ cm.
- (1) Konstruiere einen Kreis K_1 , der durch den Punkt $P(5|6)$ verläuft und K in $T(0|3)$ berührt.
 - (2) Konstruiere einen Kreis K_2 , der durch den Punkt $Q(-2|1)$ verläuft und K in $T(0|3)$ berührt.
 - (3) Für welche Punkte R , die nicht auf dem Kreis K (Kreis um $M(0|0)$ mit $r = 3$ cm) liegen, läßt sich kein Kreis konstruieren, der durch R geht und den Kreis K in $T(0|3)$ berührt? Kennzeichne in der Zeichnung oder beschreibe die Lage der Punkte und begründe dies!
6. In der folgenden Tabelle sind jeweils die Endziffern natürlicher Zahlen n und der dazugehörigen Potenzen von n gegeben.

Beachte folgendes Beispiel: Für $n = 14$ gilt $n^2 = 196$, $n^3 = 2744$ und $n^4 = 38416$

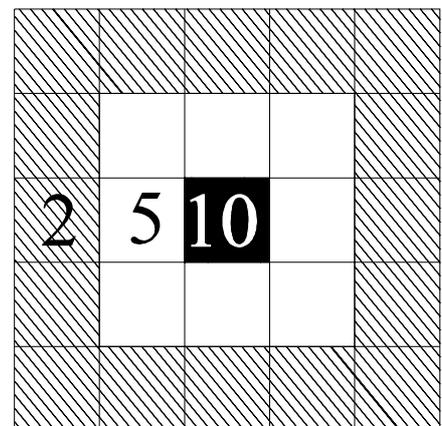
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
n²	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
n³	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
n⁴	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
2n⁴										
3n²										

W
A
H
L
A
U
F
G
A
B
E
N

- a) Betrachtet werden nun die natürlichen Zahlen $n = 100, 101, 102, \dots, 110$.
- (1) Für welche dieser Zahlen ist $(n^4 - 1)$ durch 5 teilbar?
 - (2) Für welche dieser Zahlen ist $(n^4 - n)$ durch 10 teilbar?
- b) (1) Bestimme entsprechend die Endziffern für $2n^4$ sowie $3n^2$.
- (2) Begründe: $2x^4 - 3y^2 = 117$ hat für natürliche Zahlen x und y keine Lösung.

7. Die Lösungen zu den folgenden Fragen können auch als Summe oder Produkt angegeben werden!

Auf einer quadratischen Wurfscheibe sind drei Zonen gekennzeichnet. Für jedes Feld einer Zone gilt die angegebene Punktzahl, die bei einem Treffer gutgeschrieben wird; bei zwei Treffern werden die jeweiligen Punktzahlen addiert.



- a) Lars trifft **jeden Punkt** der Scheibe mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.
- (1) Lars trifft die Scheibe einmal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er
10 Punkte,
5 Punkte,
2 Punkte ?
 - (2) Lars trifft die Scheibe zweimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er mehr als 10 Punkte?
- b) Sven trifft die Scheibe bei jedem Wurf mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,5$. Falls er die Scheibe trifft, trifft er jeden Punkt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.
- (1) Sven wirft einmal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er 10 Punkte?
 - (2) Sven wirft zweimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er 0 Punkte?
 - (3) Sven wirft zweimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 10 Punkte?

5. Frankfurt und Wiesbaden liegen 45 km auseinander.
- Herr Müller braucht mit seinem Pkw von Frankfurt bis Wiesbaden 40 Minuten. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fährt er?
 - Herr Schmitt fährt von Frankfurt nach Wiesbaden zunächst 12 Minuten lang mit $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Die restliche Strecke legt er mit $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück. Wieviel Minuten ist er insgesamt unterwegs?
 - Ein Lkw fährt um 9 Uhr in Frankfurt mit $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ab. Um 9.05 Uhr folgt ihm ein Pkw mit $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
 - Um wieviel Uhr wird der Lkw vom Pkw eingeholt?
 - Wieviel km von Frankfurt entfernt wird der Lkw vom Pkw eingeholt?

- W
A
H
L
A
U
F
G
A
B
E
N
6. In ein Quadratgitter sind die Punkte A, B, C, ..., J eingetragen.
- | | | |
|---|---|---|
| ● | ● | ● |
| A | B | C |
| ● | ● | ● |
| D | E | F |
| ● | ● | ● |
| G | H | J |
- Jeweils vier Gitterpunkte sollen Eckpunkte eines Quadrates sein. Gib alle Quadrate an, die
 - E als Eckpunkt haben,
 - A als Eckpunkt haben,
 - B als Eckpunkt haben.
 - Durch diese Gitterpunkte sollen Geraden verlaufen. Wie viele Lösungen gibt es,
 - wenn 3 Punkte auf einer Geraden liegen,
 - wenn A und mindestens ein weiterer Punkt auf einer Geraden liegen,
 - wenn nur 2 Punkte auf einer Geraden liegen?
 - Durch die Gitterpunkte sollen Kreise verlaufen. Wie viele Lösungen gibt es,
 - wenn A, B und G auf einem Kreis liegen,
 - wenn A, B und C auf einem Kreis liegen,
 - wenn drei der Punkte A, E, H und J auf einem Kreis liegen?

7. In der Druckindustrie können aus gebrauchten (alten) Metallplatten durch Einschmelzen und Reinigen wieder gebrauchsfähige (neue) Platten hergestellt werden.

Beispiel:

Aus 4 alten Platten kann eine neue Platte hergestellt werden.

Aus 25 alten Platten können nach dieser Methode in drei Schritten 8 neue hergestellt werden, denn

$$25 : 4 = 6 \text{ Rest } 1$$

$$7 : 4 = 1 \text{ Rest } 3$$

$$4 : 4 = 1$$

- Wie viele Platten kann man nach dieser Methode aus 16, wie viele aus 175 alten Platten insgesamt herstellen?
 - Wie viele alte Platten benötigt man mindestens für 2, wie viele für 10 neue Platten?
- Bei einer verbesserten Technik kann man aus 3 alten Platten eine neue Platte herstellen. Wie viele neue Platten kann man aus 175 alten Platten insgesamt herstellen?
- Bei einer anderen Technik können aus 20 alten Platten letztendlich 19 neue Platten hergestellt werden. Wie viele alte Platten benötigt man mindestens für eine neue Platte?

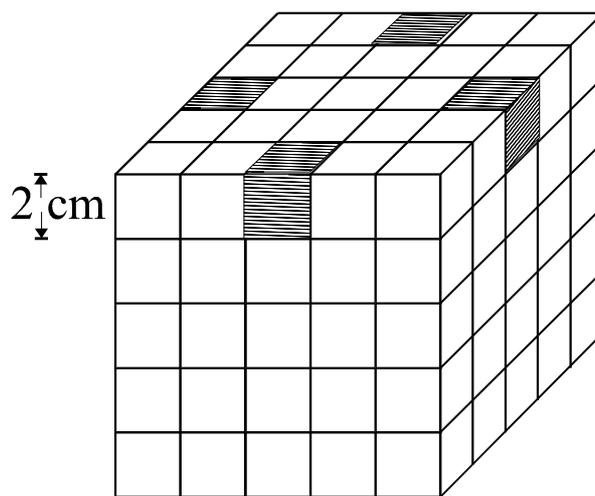
AUFGABEN DER GRUPPE C

P
F
L
I
C
H
T
A
U
F
G
A
B
E
N

1. a) Wenn ein Bauer täglich 24 kg Rüben an eine Kuh verfüttert, so reicht der Futtermvorrat 180 Tage.
 - (1) Wie lange würde der Futtermvorrat reichen, wenn er täglich nur 20 kg Rüben an eine Kuh verfüttert?
 - (2) Wieviel kg Rüben darf er täglich an eine Kuh verfüttern, wenn sein Vorrat 270 Tage reichen soll?
- b) Für 10 Schweine reicht der Futtermvorrat des Bauern 240 Tage. Nachdem er die 10 Schweine 60 Tage gefüttert hat, kauft er noch 2 Schweine dazu. Wieviel Tage reicht jetzt sein Futtermvorrat insgesamt, wenn jedes Schwein die gleiche Futtermenge wie vorher bekommt?

2. a) Aus wie vielen kleinen Würfeln besteht der große Würfel?
- b) Berechne von dem großen Würfel
 - (1) das Volumen,
 - (2) die Oberfläche.

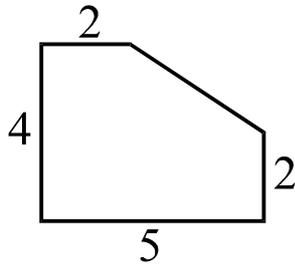
Beachte: Die Kantenlänge eines kleinen Würfels beträgt 2 cm.
- c) Die oberste Schicht des großen Würfels wird weggenommen. Wie groß ist nun
 - (1) das Volumen,
 - (2) die Oberfläche der Restkörper?
- d) Die vier oberen Eckwürfel des großen Würfels werden weggenommen. Wie groß ist die Oberfläche des Restkörpers?
- e) Die 4 gekennzeichneten kleinen Würfel des großen Würfels werden entfernt. Wie groß ist die Oberfläche des Restkörpers?



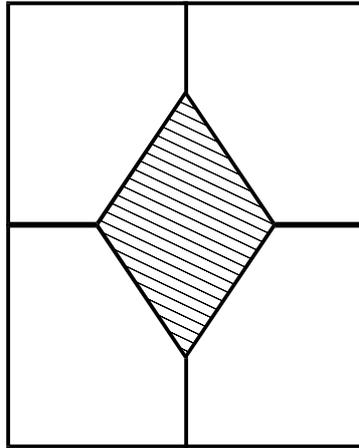
W
A
H
L
A
U
F
G
A
B
E
N

3. Salzlösungen bestehen aus Wasser und Salz, Zuckerlösungen aus Wasser und Zucker. Der Salzgehalt (Zuckergehalt) wird in Prozent vom Gesamtgewicht der Lösung angegeben.
 - a) 200 kg Zuckerlösung haben einen Zuckergehalt von 35 %.
 - (1) Wieviel kg Zucker,
 - (2) Wieviel kg Wasser enthält die Zuckerlösung?
 - b) In 600 kg Meerwasser sind 24 kg Salz enthalten. Wieviel Prozent Salz enthält dieses Meerwasser?
 - c) Aus 60 kg Wasser und 15 kg Zucker wird eine Zuckerlösung hergestellt. Wieviel Prozent Zucker enthält die Zuckerlösung?
 - d) In einem Behälter sind 90 kg Zuckerlösung mit einem Zuckergehalt von 40 %.
 - (1) Wieviel kg Zucker sind in dieser Zuckerlösung?
 - (2) Es werden 30 kg Wasser zugegeben, das heißt, die Zuckerlösung wird verdünnt. Wieviel Prozent Zucker enthält die verdünnte Zuckerlösung?
4. Bestimme jeweils die Lösungsmenge; $G = \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
 - a) $8x + 15 = 90 + 3x$
 - b) $6 \cdot (x - 4) = 12 + 2x$
 - c) $5 \cdot (3x - 4) = 6 \cdot (2x + 8) - 59$
 - d) $(x + 5) \cdot (x - 5) = 200$
 - e) $5 \cdot (6x - 4) < 2x + 8$

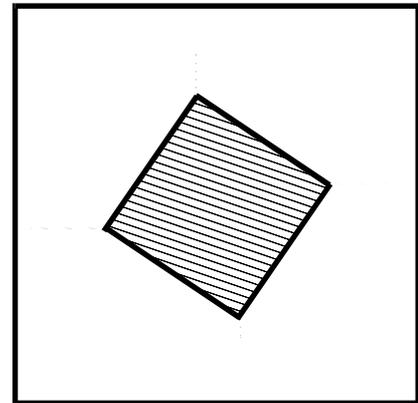
5. a) Berechne den Flächeninhalt des in Figur 1 abgebildeten Legeplättchens. (Alle Maße in cm.)
 b) Mit jeweils 4 dieser Legeplättchen werden die Figuren 2 und 3 gelegt. Berechne den Flächeninhalt der **schraffierten** Fläche
 (1) von Figur 2,
 (2) von Figur 3.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

W
A
H
L
A
U
F
G
A
B
E
N

6. a) Tina und Steffi sind zusammen 34 Jahre alt. Steffi ist 8 Jahre älter als Tina.
 (1) Wie alt ist Tina?
 (2) Wie alt ist Steffi?
 b) Björn ist 11 Jahre alt, sein Vater ist dreimal so alt wie er. In wieviel Jahren wird der Vater doppelt so alt wie Björn sein?
 c) Drei Geschwister sind 16 Jahre, 13 Jahre und 11 Jahre alt. In wieviel Jahren werden sie zusammen 100 Jahre alt sein?
 d) Drei Brüder sind zusammen 75 Jahre alt. Der älteste Bruder ist 2 Jahre älter als der mittlere; der jüngste Bruder ist 5 Jahre jünger als der mittlere. Wie alt ist jeder der drei Brüder?
7. Der Radweg von Weilburg nach Wetzlar ist 24 km lang.
- a) Anton fährt diese 24 km lange Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
 Wieviel Minuten benötigt er dafür?
- b) (1) Barbara benötigt 72 min für diese Strecke. Berechne ihre Durchschnittsgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
 (2) Claudia benötigt 48 min für diese Strecke. Berechne ihre Durchschnittsgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
 (3) Barbara startet um 10.00 Uhr in Weilburg zur Fahrt nach Wetzlar, Claudia startet gleichzeitig in Wetzlar zur Fahrt nach Weilburg. Sie begegnen sich unterwegs. Wieviel km von Weilburg entfernt treffen sie sich?