

MATHEMATIK–WETTBEWERB 1997/98 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE A

1. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an: $G = \mathbb{Z}$.

a) $(x + 7)^2 = 100$

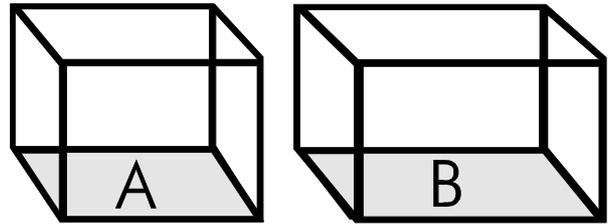
b) $(x + 7)^2 > 18$

c) $(2x - 4)^2 - (2x + 4)^2 < 64$

d) $(2x^2 - 8) \cdot (3x - 15)^2 = 0$

2. Die Grundflächen zweier quaderförmiger Gefäße sind $A = 150 \text{ cm}^2$ und $B = 250 \text{ cm}^2$ groß.

a) Das Gefäß A ist bis zu einer Höhe $h = 40 \text{ cm}$ und das Gefäß B bis zu einer Höhe $h = 20 \text{ cm}$ mit Wasser gefüllt. Von Gefäß A wird soviel Wasser nach B umgefüllt bis in beiden Gefäßen der Wasserstand gleich hoch ist. Wie hoch steht dann das Wasser?



b) In die leeren Gefäße A und B werden jeweils

3 Liter Wasser gefüllt. Wieviel Liter Wasser muß man dann von A nach B umfüllen, damit in beiden Gefäßen der Wasserspiegel gleich hoch ist?

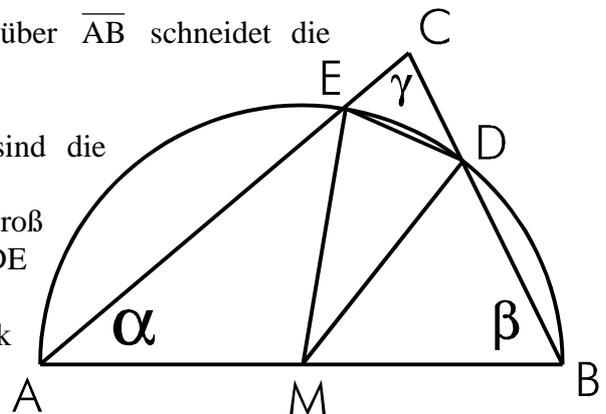
c) Im Gefäß B befinden sich 4,2 Liter Wasser mehr als in A. Der Wasserspiegel ist in B doppelt so hoch wie in A. Wieviel Liter Wasser befinden sich insgesamt in beiden Gefäßen?

3. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Der Halbkreis über \overline{AB} schneidet die Dreiecksseiten $b = |AC|$ und $a = |BC|$ in E und in D.

a) Es ist $\alpha = 40^\circ$ und $\beta = 65^\circ$. Wie groß sind die Innenwinkel der Dreiecke MDE und EDC?

b) In einer entsprechenden Figur ist $\alpha = 40^\circ$. Wie groß ist β zu wählen, damit das Dreieck MDE gleichseitig ist?

c) In einer entsprechenden Figur ist das Dreieck MDE rechtwinklig. Wie groß ist dann γ ?



4. a) Konstruiere das Dreieck ABC mit $|AB| = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 50^\circ$ und dem Radius des Umkreises $r_u = 4 \text{ cm}$.

b) Konstruiere das Dreieck ABC mit $\alpha = \beta$, $\gamma = 70^\circ$ und dem Radius des Umkreises $r_u = 5 \text{ cm}$.

c) Konstruiere das Dreieck ABC mit $\alpha = 50^\circ$, der Höhe $h_c = 8 \text{ cm}$ und dem Radius des Inkreises $r_i = 3 \text{ cm}$.

5. $[x]$ bedeutet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Beispiele: $[14,8] = 14$, $[14] = 14$, $[-14,8] = -15$

Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an: $G = \mathbb{Z}$.

a) $[0,5 + x] = 21$

b) $[0,5 + x] = -5$

c) $[0,5 + 2x] < 10$

d) $[0,5x] - 0,5x = -0,5$

e) $(2 - [2 + 0,5x])^2 = 100$

6. a) Gib 3 natürliche Zahlen n an, so daß $(4 + n)^2$ durch 16 teilbar ist!

b) Gib 3 natürliche Zahlen n an, so daß $(4n - 3)$ durch 13 teilbar ist!

c) Gib 2 natürliche Zahlen n an, die nicht durch 11 teilbar sind, so daß $(10n + 1)^2 - 1$ durch 11 teilbar ist!

d) Begründe, warum die Summe $(10n + 1)^9 + (10n + 4)^7$ mit $n \in \mathbb{N}$, stets durch 5 teilbar ist.

7. Von den Fahrgästen der Verkehrsbetriebe einer Stadt weiß man aus Erfahrung:

60 % der Fahrgäste besitzen eine Monatskarte,

1 % der Fahrgäste gelten als Schwarzfahrer.

Es werden 10 Personen kontrolliert. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

a) Alle 10 Personen besitzen eine Monatskarte.

b) Genau 2 der 10 kontrollierten Personen besitzen eine Monatskarte.

c) Mindestens 1 der 10 kontrollierten Personen besitzt eine Monatskarte.

d) Mindestens 8 der 10 kontrollierten Personen besitzen eine Monatskarte.

e) Unter den 10 Personen befindet sich genau ein Schwarzfahrer.

BITTE BEACHTEN : Angabe der Wahrscheinlichkeiten als Produkt oder Summe genügt!

MATHEMATIK–WETTBEWERB 1997/98 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE B

1. a) Die Wasser- und Kanalgebühren wurden um 7,5 % erhöht. Nach der Erhöhung zahlt Familie Alt 69 DM mehr. Wieviel DM zahlte Familie Alt vor der Erhöhung?
b) Die Müllgebühren wurden um 5 % erhöht. Nach der Erhöhung zahlt Familie Braun 299,25 DM. Wieviel DM zahlte sie vor der Erhöhung?
c) 1997 zahlte Familie Casalena für ihre Wohnung monatlich 250 DM Nebenkosten und 1250 DM Miete. 1998 wurden die Miete um 14 % und die Nebenkosten um 8 % erhöht. Wieviel Prozent muß Familie Casalena nun mehr für ihre Wohnung bezahlen?
-

2. Die Firma Media-Run bietet Mobiltelefone mit folgenden Tarifen an:

Tarif 1: 25 DM Grundgebühr; bei jedem Gespräch 1,92 DM für die erste Minute, danach 0,032 DM pro Sekunde.

Tarif 2: 30 DM Grundgebühr; für jedes Gespräch 0,30 DM pro angefangenen 10 Sekunden.

- a) Herr Will hat sich für den **Tarif 1** entschieden.
(1) Wieviel DM muß er für ein Gespräch von 75 Sekunden Dauer bezahlen?
(2) Im Januar hat er 40 mal telefoniert, jeweils weniger als eine Minute lang. Wieviel DM muß er für diesen Monat einschließlich der Grundgebühr bezahlen?
b) Frau Müller hat sich für den **Tarif 2** entschieden.
(1) Wieviel DM muß sie für ein Gespräch von 75 Sekunden Dauer bezahlen?
(2) Sie hat im Januar 40 mal telefoniert und mußte dafür einschließlich der Grundgebühr 120 DM bezahlen. Wie viele Minuten hat sie mindestens telefoniert?
c) Bestimme die höchstmögliche Anzahl von Telefonaten, wenn die Telefonrechnung einschließlich der Grundgebühr nicht mehr als 100 DM im Monat betragen soll;
(1) nach Tarif 1,
(2) nach Tarif 2.
-

3. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an: $G = \mathbb{Z}$.

- a) $8(5x - 7) = 4(7x + 5) - 4$
b) $7 - (3x - 4) = 27 - 2(5x + 8)$
c) $7x(4x - 8) < 14x(2x - 6) - 56$
d) $(x + 8)(3x - 2) = 2x(x + 11)$
-

4. a) (1) Zeichne in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm ein Rechteck mit den Eckpunkten A(1|1), B(5|1), C(5|7) und D(1|7).
(2) Zeichne die Gerade durch die Punkte P(3|2) und Q(5|4). Spiegele das Rechteck an der Geraden PQ und benenne die Bildpunkte mit A', B', C' und D'.
(3) Berechne den Flächeninhalt der Gesamtfigur.
(4) Berechne den Flächeninhalt der gemeinsamen Fläche von Original- und Bildfigur.
(5) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks B'BD'D, ohne zu messen.
b) Spiegelt man das Viereck ABCD an einer Parallelen zu PQ, so ist die gemeinsame Fläche von Original- und Bildfigur 16 cm^2 groß. Zeichne eine entsprechende Spiegelachse ein.
-

5. a) (1) Konstruiere das Dreieck ABC aus $c = |AB| = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 55^\circ$.
 (2) Zeichne die Höhe h_a mit den Endpunkten A und D ein; berechne die Größe des Winkels $\triangle BAD$.
 (3) Konstruiere die Winkelhalbierende w_γ mit den Endpunkten C und E. Sie schneidet die Höhe h_a im Punkt F. Berechne die Größe des Winkels $\triangle AFE$.
 (4) Spiegele den Punkt E an der Geraden CB. Du erhältst das Viereck ABE'C. Berechne die Größe des Winkels $\triangle CE'B$.
- b) In einem entsprechend konstruierten Viereck ABE'C sind die Winkel $\triangle E'BE$ und $\triangle ACE'$ jeweils 90° groß. Berechne die Größe der Winkel α und β .

6. Ersetze * durch eines der vier Zeichen + - : • und x durch eine ganze Zahl.
Beachte: Tritt innerhalb einer Aufgabe x mehrfach auf, so ist bei jeder Lösung die gleiche Zahl für x einzusetzen!

Beispiel: $4 * x = 16$ hat die Lösungen $4 + 12 = 16$
 $4 - (-12) = 16$
 $4 \cdot 4 = 16$

- a) Gib jeweils in entsprechender Weise alle Lösungen an! Grundmenge $G = \mathbb{Z}$.

- (1) $3 * x = -6$
 (2) $x * x = 36$
 (3) $x * x = -36$
 (4) $1 * x = x + x$

- b) Gib jeweils in entsprechender Weise alle Lösungen an! Grundmenge $G = \{-2, -1, 0, 1, \}$.

$2 * x = x + x$

7. a) Addiert man – mit 1 beginnend – aufeinanderfolgende ungerade Zahlen, so erhält man als Summe eine Quadratzahl. Ergänze die Tabelle:

$1 + 3$	$1 + 3 + 5$	$1 + 3 + 5 + 7$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9$	$1 + 3 + 5 + \dots + 19$	$1 + 3 + 5 + \dots +$
2^2	3^2	4^2			50^2

- b) Addiert man – mit 1 beginnend – die Kubikzahlen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, so erhält man als Summe eine Quadratzahl. Beachte folgende Beispiele und ergänze die fehlenden Zahlen!

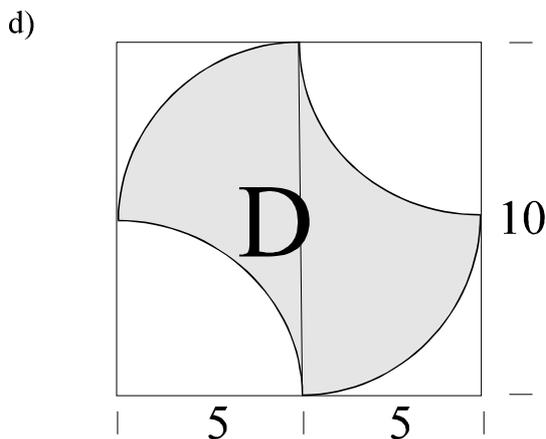
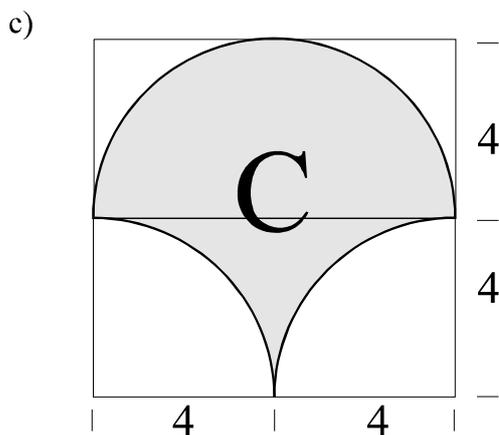
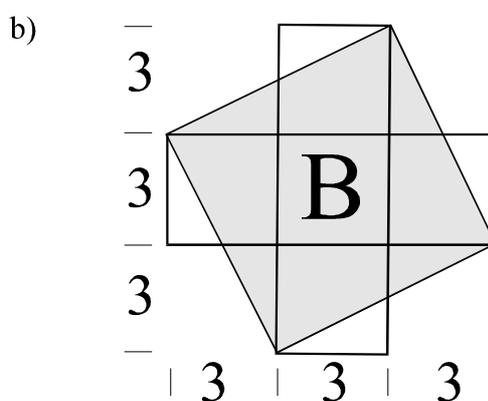
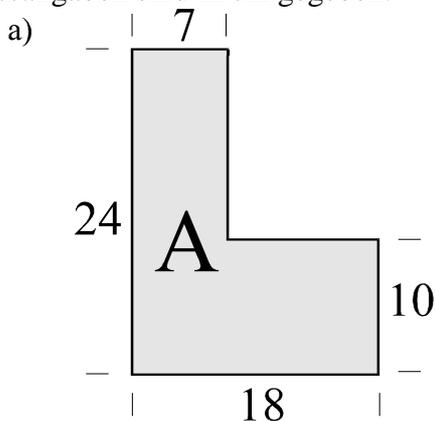
$1^3 + 2^3$	$1^3 + 2^3 + 3^3$	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$
9	36		225
3^2	6^2		15^2

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 3$	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$
28^2	

AUFGABEN DER GRUPPE C

1. Autovermietung A bietet einen Mietwagen an: 20 DM pro Tag und 1 DM pro Kilometer. Autovermietung B bietet einen Mietwagen an: 60 DM pro Tag und 0,50 DM pro Kilometer.
- Dieter nahm von der Autovermietung A ein Auto für 2 Tage und fuhr 460 km. Wieviel DM mußte Dieter bezahlen?
 - Klaus nahm von der Autovermietung B ein Auto für 3 Tage und bezahlte 480 DM. Wieviel km fuhr Klaus?
 - Gerhard nahm von der Autovermietung C ein Auto für 4 Tage und fuhr 420 km. Die Autovermietung C verlangt für den gefahrenen Kilometer 0,80 DM. Wie hoch war die Gebühr pro Tag, wenn Gerhard 436 DM bezahlte?
 - Rosi nahm bei Autovermietung A, Doris bei der Autovermietung B ein Auto für einen Tag. Sie fahren die gleiche Strecke und bezahlten gleich viel. Welche Strecke fahren beide jeweils?

2. Bestimme bei den folgenden Figuren jeweils den Flächeninhalt der schraffierten Fläche. Alle Maßangaben sind in cm gegeben.



3. a) Richard würfelt gleichzeitig mit einem roten und einem weißen Würfel.
Beispiel: 1. Wurf: roter Würfel 3, weißer Würfel 5 \rightarrow kurz: (r3 | w5) oder
2. Wurf: roter Würfel 5, weißer Würfel 3 \rightarrow kurz: (r5 | w3)
Wie viele verschiedene Würfe sind möglich? Schreibe sie in einer Tabelle auf!
- b) Ursel würfelt gleichzeitig mit einem roten, einem weißen und einem blauen Würfel.
Beispiel: roter Würfel 3, weißer Würfel 5, blauer Würfel 1 \rightarrow kurz: (r3 | w5 | b1)
Wie viele verschiedene Würfe sind möglich?
- c) Klaus würfelt auch mit drei Würfeln. Er multipliziert die Augenzahlen zweier Würfel miteinander, subtrahiert dann die Augenzahl des 3. Würfels und notiert das Ergebnis.
(1) Welche Ergebnisse sind möglich, wenn er eine 3, eine 4 und eine 6 würfelt?
(2) Gib alle Würfe an, mit denen er als Ergebnis 13 erhalten kann!

4. a) Großmärkte für Wiederverkäufer geben ihre Preise ohne die Mehrwertsteuer (MwSt) von 15% an, der Käufer muß den Preis einschließlich der MwSt bezahlen. Eine Maschine ist mit 1800 DM (ohne MwSt) ausgezeichnet. Berechne den Preis, den der Käufer bezahlen muß!
- b) Beim Verkauf einer Stereoanlage betrug die Mehrwertsteuer 480 DM. Wieviel DM mußte der Kunde für diese Stereoanlage bezahlen?
- c) Für einen Schrank mußte der Kunde 1840 DM bezahlen. Mit welchem Preis war der Schrank ausgezeichnet?

5. a) Bestimme x!

(1) $3x - 21 = 47 - x$

(2) $3 \cdot (x - 21) = 47 - x$

(3) $3x - 21 = 4 \cdot (7 - x)$

- b) Gib die Lösungsmenge an; $G = \mathbb{Z}$.

(1) $2x - 19 < 3$

(2) $16 - 2x > 4$

6. a) Viele Zahlen lassen sich als Summe von Quadraten natürlicher Zahlen darstellen.

Beispiele: $5 = 1^2 + 2^2$ oder $13 = 2^2 + 3^2$ oder $25 = 3^2 + 4^2$

(1) Welche Zahl wird durch $12^2 + 5^2$ dargestellt?

(2) Stelle entsprechend 100 als Summe von zwei Quadraten natürlicher Zahlen dar!

(3) Stelle 49 als Summe von drei Quadraten natürlicher Zahlen dar!

- b) Quadrate natürlicher Zahlen lassen sich auch als Summe von natürlichen Zahlen in aufsteigender und dann absteigender Reihenfolge darstellen.

Beispiele: $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$ oder $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$

(1) Stelle auf die gleiche Weise 10^2 dar.

(2) Welche Quadratzahl ist durch die folgende Reihe dargestellt?

$\alpha) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \square = \square^2$

$\beta) 1 + 2 + \dots + 55 + 56 + 57 + 58 + 57 + 56 + \dots + 3 + 2 + 1 = \square = \square^2$

- 7) a) Zeichne das Viereck ABCD mit den in der Skizze angegebenen Maßen.

- b) Berechne alle Winkel im Viereck ABCD, wenn $\gamma = 136^\circ$.

- c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

- d) Spiegele das Viereck ABCD an der Geraden durch die Punkte B und D und benenne die Bildpunkte mit A', B', C' und D'.

- e) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks CBC'D.

