MATHEMATIK-WETTBEWERB 1999/2000 DES LANDES HESSEN

Hinweis : Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.
Alle Lösungen sind ausführlich zu begründen!

AUFGABEN DER GRUPPE A

---

1. a) Faktorisiere soweit wie möglich:

   (1) $16x^3 - 48x^2 + 36x$

   (2) $5x^6 - 80x^2$

   b) Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an; $G = \mathbb{Z}$.

   (1) $x(2x + 7) < x(x - 3)$

   (2) $(x^2 - 20)(x + 2) < (x^2 - 20)(2x - 7)$

---

2. a) Zeichne das Dreieck ABC mit $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 12$ cm und $|AC| = 10$ cm. Zeichne den Schnittpunkt H der Höhen, spiegele den Punkt H am Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ und nenne den Spiegelpunkt E. Du erhältst den Spiegelpunkt F, wenn du H am Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ spiegelst.

   b) Beweise, dass das Viereck AHCF ein Parallelogramm ist.

   c) (1) Beweise, dass $\measuredangle BAF = \measuredangle EBA = 90°$ ist.
   (2) Beweise, dass das Viereck ABEF ein Rechteck ist.

   d) (1) Beweise, dass $\measuredangle FCB = 90°$ ist.
   (2) Beweise, dass $\measuredangle BAC + \measuredangle CEB = 180°$ ist.

---

3. Zeichne zu jeder der folgenden Aufgaben in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) die Punkte A(1|4) und B(7|2) ein.

   a) Zeichne die Gerade g durch den Koordinatenursprung und den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. **Konstruiere** zwei Punkte R und S auf g, so dass das Viereck ARBS ein Rechteck ist.

   b) **Konstruiere** ein symmetrisches Trapez ABCD, so dass die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{DB}$ senkrecht aufeinander stehen und jeweils 7 cm lang sind.

   c) **Konstruiere** alle Geraden durch B, die vom Punkt A 3 cm Abstand haben.

---

4. a) x, y sind zwei benachbarte ungerade natürliche Zahlen. **D ist die Differenz der Quadrate** dieser Zahlen.
   (1) Zeige, dass die Differenz D immer durch 4 teilbar ist.
   (2) Für welche Zahlenpaare (x|y) ist die Differenz D durch 7 teilbar ? Gib 3 Zahlenpaare an.
   (3) Für welche Zahlenpaare (x|y) ist die Differenz D ebenfalls eine Quadratzahl? Gib 3 Zahlenpaare an.

   b) Begründe: Wenn x eine ungerade natürliche Zahl ($x > 1$) ist, so ist das Produkt $x(x^2 - 1)$ durch 24 teilbar.

---

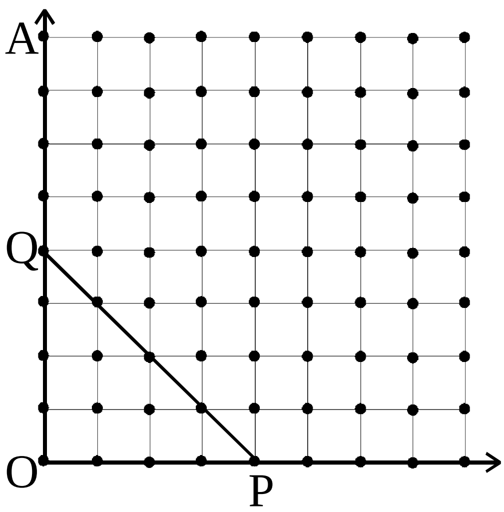
5. Carl Friedrich Gauß (1777–1855) hat ein Verfahren angegeben, das es ermöglicht, das Datum des Ostersonntags eines jeden Jahres zu berechnen:

> *Teilt man die Jahreszahl **n** durch **19**, so erhält man einen ganzzahligen Rest **a** ($a \geq 0$),*
> *bei Division der Jahreszahl **n** durch **4** den Rest **b** ($b \geq 0$),*
> *und bei Division der Jahreszahl **n** durch **7** den Rest **c** ($c \geq 0$).*
>
> *Teilt man die Summe **19a + 24** durch **30**, so erhält man den Rest **d** ($d \geq 0$),*
> *und bei Division der Summe **2b + 4c + 6d + 5** durch 7 den Rest **e** ($e \geq 0$).*
>
> *Liegt der Ostersonntag im März ($d + e \leq 9$), so ist das Datum bestimmt durch den Term **22 + d + e**; liegt er im April ($d + e \geq 10$), dann gilt statt dessen der Term **d + e – 9**.*

a) Welches Datum hatte 1995 der Ostersonntag?
b) (1) Zeige, dass für $a < 19$ die Summe $19a + 24$ nicht durch 30 teilbar ist.
(2) Gib eine Bedingung dafür an, dass am 23. März Ostersonntag ist.
(3) Für welchen Rest a kann am 23. März Ostersonntag sein?
(4) In welchem Jahr wird der Ostersonntag erstmals wieder am 23. März sein?

---

6. Auf der Verbindungsstrecke der Punkte Q(0|4) und P(4|0) liegen 5 Gitterpunkte; auf den Seiten des Dreiecks OPQ liegen 12 Gitterpunkte.



a) Wie viele Gitterpunkte liegen auf der Strecke $\overline{AB}$ mit A(0|8) und
(1) B(8|0),
(2) B(6|0),
(3) B(4|0),
(4) B(1|0)?
b) Auf der Strecke $\overline{XY}$, mit X(20|0) und Y(0|y) liegen 11 Gitterpunkte. Bestimme y. Gib drei Möglichkeiten an.
c) Wie viele Gitterpunkte liegen auf den Seiten des Dreiecks OCD mit C(24|0) und D(0|12)?
d) Auf den Seiten des Dreiecks OEF, mit E(e|0) und F(0|f), liegen 37 Gitterpunkte. Bestimme e und f. Gib drei Möglichkeiten an!

---

7. Die Firma Idla produziert „Überraschungshasen“, die mit kleinen Fahrzeugmodellen gefüllt sind. Jeweils 20 sind in einem Karton verpackt. Es ist bekannt, dass von diesen jeweils 4 mit Autos, 10 mit Motorrädern und 6 mit Flugzeugen gefüllt sind.

a) Susanne entnimmt einem Karton drei Überraschungshasen.
(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält der erste Hase ein Auto?
(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthalten der erste und der zweite Hase ein Auto?
(3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Susanne alle drei Fahrzeugmodelle?
(4) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Susanne mindestens zwei Autos?
b) Anna entnimmt einem Karton 18 Hasen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleiben zwei mit Flugzeugen gefüllte Hasen im Karton übrig?

BITTE BEACHTEN: Angabe der Wahrscheinlichkeiten als Produkt oder Summe von Produkten genügt!

MATHEMATIK-WETTBEWERB 1999/2000 DES LANDES HESSEN

Hinweis : Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.
Alle Lösungen sind ausführlich zu begründen!

AUFGABEN DER GRUPPE B

---

1. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an; $G = \mathbb{Z}$.

   a) $4(3x - 1) = x - (8x + 4)$

   b) $3(2x - 1) < 8x + 3$

   c) $(3x + 2)(3x - 2) = (3x)^2 - 4$

   d) $(7x - 4)^2 + 35 = 9x^2 - (4x + 3)(5 - 10x)$

---

2. a) Beate kauft einen neuen Computer. Sie erhält 399 DM Ermäßigung, das sind 14 % des Ladenpreises. Wie viel DM muss Beate für den Computer bezahlen?

   b) Dieter plant einen neuen Computer für 2150 DM und Software für 850 DM zu kaufen. Der Preis des Computers ermäßigt sich um 12 %, für die Software muss er 102 DM mehr bezahlen.
   (1) Wie viel DM muss er insgesamt bezahlen?
   (2) Um wie viel Prozent ist der neue Gesamtpreis höher bzw. niedriger als der ursprüngliche Gesamtpreis?

   c) Ein Computer verliert jährlich 20 % seines jeweiligen Zeitwertes. Um wie viel Prozent hat sich der Wert des Computers nach 2 Jahren verringert?

---

3. a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $b = c = 7$ cm und $\alpha = 72°$. Berechne die Größe des Winkels γ.

   b) Zeichne die Höhe h_b mit dem Höhenfußpunkt D und die Höhe h_a mit dem Höhenfußpunkt E ein. Die beiden Höhen schneiden sich im Punkt F.

   c) (1) Berechne die Größe des Winkels $\measuredangle CBD$.
   (2) Berechne die Größe des Winkels $\measuredangle AFB$.

   d) Verlängere die Höhe h_a über E hinaus. Zeichne einen Kreis um Punkt B mit dem Radius $|BC| = a$. Der Kreis schneidet die Gerade AE im Punkt G. Du erhältst das Viereck ABGC. Berechne die Größe des Winkels $\measuredangle ACG$.

   e) Wie groß muss bei einer entsprechenden Konstruktion der Winkel α gewählt werden, damit das Viereck ABGC eine Raute ist?

---

4. **Hinweis**: Maßstab 1: 200 bedeutet, dass 1 cm auf der Karte 200 cm in Wirklichkeit sind.

   a) Fülle die Tabelle aus:

Maßstab	1 : 1000	1 : 7500		1 : 24 000 000
Entfernung auf der Karte	cm	12 cm	15 cm	5,6 cm
Entfernung in Wirklichkeit	20 m	m	4500 m	km

   b) Auf einer Karte im Maßstab 1 : 50000 liegen zwei Orte 9,6 cm voneinander entfernt. Wie weit liegen die gleichen Orte auf einer zweiten Karte im Maßstab 1 : 75000 voneinander entfernt?

   c) Auf einer Karte (Maßstab 1 : 25000) wird ein rechteckiges Waldstück abgemessen: Länge 5,2 cm, Breite 3,6 cm. Wie viel km^2 beträgt der Flächeninhalt des Waldstücks in Wirklichkeit?

---

5. Zum Lösen der folgenden Aufgaben ist zunächst eine Gleichung aufzustellen.
   a) Multipliziert man den Nachfolger einer ganzen Zahl mit 9, so erhält man die Differenz aus dieser ganzen Zahl und 23. Wie heißt diese Zahl?
   b) Verlängert man die eine Seite eines Quadrates um 5 cm und verkürzt die andere Seite um 3 cm, so erhält man ein Rechteck, dessen Flächeninhalt um 9 cm^2 größer ist als der des Quadrates. Berechne die Seitenlänge des Quadrates.
   c) Ein Großvater und seine Enkelin sind heute zusammen 90 Jahre alt. In fünf Jahren wird der Großvater viermal so alt sein wie seine Enkelin. Wie alt sind der Großvater und seine Enkelin heute?

---

6. a) Das Datum 24.12.1968 ergibt hintereinander geschrieben die Zahl 24121968. Diese Zahl lässt sich ohne Vertauschen der Ziffern in die drei geraden Zahlen 2412, 196 und 8 zerlegen. Zerlege die Zahl 24121968 ohne Vertauschen der Ziffern ebenso in drei gerade Zahlen. Gib die weiteren fünf Möglichkeiten an.
   b) (1) Die Zahl 2375246895 ist durch Hintereinanderschreiben von drei Zahlen entstanden. Diese drei Zahlen sind der Größe nach geordnet aufgeschrieben, beginnend mit der kleinsten Zahl. In keiner der drei Zahlen kommt eine Ziffer mehrfach vor. Schreibe die fünf Möglichkeiten für diese drei Zahlen auf.
   (2) Ändere in der Zahl 2**3**75246895 die markierte Ziffer so, dass es nur noch eine Möglichkeit für die Zerlegung in drei Zahlen gibt. Es sollen die gleichen Regeln (Bedingungen) wie bei b)(1) gelten. Gib die gesuchte Ziffer an und notiere die Zerlegung.

---

7. **Verwende das Lösungsblatt!**
   a) (1) Welcher Bruchteil der Gesamtfläche des Parallelogramms ABCD (**Abb. 1)** is**t** schraffiert?
   (2) Zeichne in das Parallelogramm ABCD ein Dreieck EFG ein, mit E und F auf $\overline{AB}$ und G auf $\overline{CD}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks EFG soll $\frac{1}{3}$ des Flächeninhalts des Parallelogramms betragen.

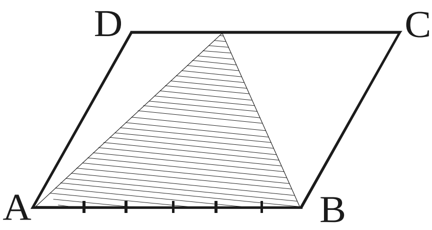


Abb. 1

   b) (1) Welcher Bruchteil der Gesamtfläche des Dreiecks ABC (**Abb. 2)** ist schraffiert?
   (2) Zeichne in das Dreieck ABC ein Dreieck DEC ein mit D und E auf $\overline{AB}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks DEC soll $\frac{1}{3}$ des Flächeninhalts des Dreiecks ABC sein.

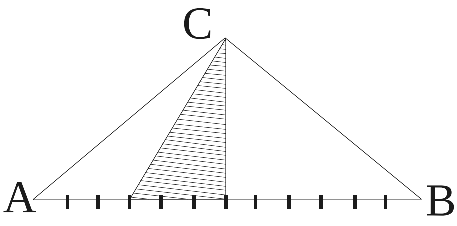


Abb. 2

   c) (1) Welcher Bruchteil der Gesamtfläche des Quadrates ABCD ist in **Abbildung 3** schraffiert? **Begründe!**
   (2) Welcher Bruchteil der Gesamtfläche des Quadrates ABCD ist in **Abbildung 4** schraffiert? **Begründe!**

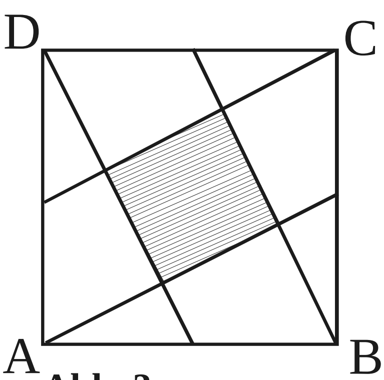


Abb. 3

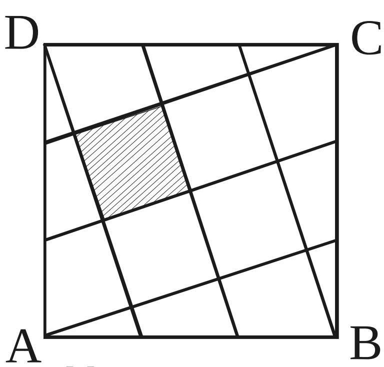


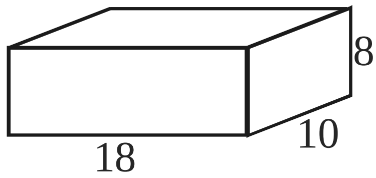
Abb. 4

MATHEMATIK-WETTBEWERB 1999/2000 DES LANDES HESSEN

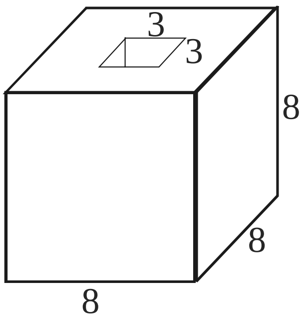
Hinweis : Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.
Alle Lösungen sind ausführlich zu begründen!

AUFGABEN DER GRUPPE C

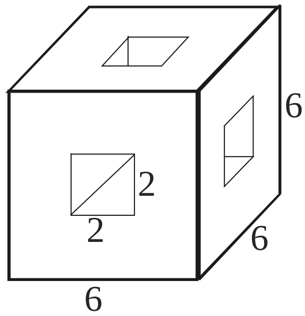
1. **Beachte: Alle Maße an den abgebildeten Körpern sind in cm angegeben!**
   a) (1) Berechne das Volumen des Quaders.
      (2) Berechne die Oberfläche des Quaders.



   b) Berechne das Volumen des abgebildeten Körpers. **Beachte:** Die Bohrung geht durch den ganzen Körper hindurch.



   c) Berechne das Volumen des abgebildeten Körpers. **Beachte**: Die Bohrungen haben alle die selbe Größe und gehen durch den gesamten Körper hindurch und liegen jeweils genau in der Flächenmitte.



---

2. Mischt man geschmolzene Metalle, so nennt man diese Mischung eine Legierung. Rotgold ist eine Legierung aus Gold und Kupfer.
   a) In 500 g Rotgold sind 70 % Gold enthalten. Wie viel Gramm Gold sind in der Legierung enthalten?
   b) 24 g Gold werden mit 36 g Kupfer legiert. Wie viel Prozent Gold enthält die Legierung?
   c) Wie viel Gramm Gold sind in 200 g Rotgold (60 % Goldgehalt) enthalten?
   d) Wie viel Gramm Kupfer muss man mit 200 g Rotgold (60 % Goldgehalt) legieren, damit die neue Legierung 50 % Gold enthält?
   e) 80 g Rotgold (40 % Goldgehalt) werden mit 120 g Rotgold (70 % Goldgehalt) legiert. Wie viel Prozent Gold enthält die neue Legierung?

---

3. Der Aufzug eines Hochhauses fährt vom Erdgeschoss bis zum 96. Stockwerk. Er braucht von Stockwerk zu Stockwerk genau 2 Sekunden. Hält er in einem Stockwerk, so bedeutet dies 15 Sekunden zusätzlichen Zeitbedarf. **Beachte:** Gib alle Zeiten in Minuten und Sekunden an! (z.B.: 270 Sekunden = 4 Minuten und 30 Sekunden)
   a) (1) Wie lange braucht der Aufzug vom Erdgeschoss bis zum 96. Stockwerk, wenn er unterwegs nicht hält?
      (2) Richard steigt im Erdgeschoss in den Aufzug und fährt ohne Halt 1 Minute und 50 Sekunden. In welchem Stockwerk steigt er aus?
   b) Wie lange braucht der Aufzug vom 84. bis zum 27. Stockwerk, wenn er im 80., im 54. und im 30. Stockwerk hält?
   c) Wie lange wäre der Aufzug vom Erdgeschoss bis zum 96. Stockwerk unterwegs, wenn er in jedem Stockwerk anhalten würde?
   d) Zoran steigt im 42. Stockwerk ein und nach 75 Sekunden (einschließlich eines Zwischenstopps) wieder aus. Im wievielten Stockwerk kann Zoran ausgestiegen sein?

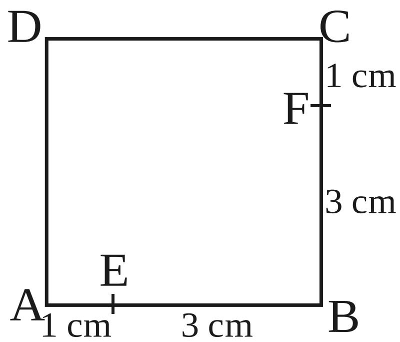
---

4. Bei einem Fußballturnier spielen 5 Mannschaften (A, B, C, D, E) gegeneinander. Jede Mannschaft spielt genau einmal gegen jede andere. Für ein gewonnenes Spiel bekommt die Mannschaft 3 Punkte, für ein Unentschieden 1 Punkt, bei einem verlorenen Spiel 0 Punkte. Zeichne die Tabelle ab und fülle sie vollständig aus!

Mannschaft	**Punkte**	**Anzahl der Spiele**		
		gewonnen	**unentschieden**	**verloren**
A	5	1		
B		4		
C				
D	2		2	
E			1	1

---

5. a) Zeichne das Quadrat mit den in der Skizze angegebenen Maßen. Spiegele das Quadrat ABCD an der Geraden EF.



b) (1) Bestimme den Flächeninhalt des gemeinsamen Flächenstücks von Original- und Bildfigur.
(2) Bestimme den Flächeninhalt der Gesamtfigur.

c) Die Gesamtfigur hat eine 2. Spiegelachse. Zeichne diese ein.

d) (1) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks EBC.
(2) Gib den Flächeninhalt des Dreiecks EBC als Bruchteil des Flächeninhalts des Quadrats ABCD in gekürzter Form an.

e) Zeichne das Quadrat ABCD noch einmal. Zeichne eine Spiegelachse E*F* so ein, dass bei einer entsprechenden Spiegelung das gemeinsame Flächenstück einen Flächeninhalt von 4 cm^2 hat.

---

6. a) Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an; $G = \mathbb{Z}$.
(1) $30x - 4 = 12x + 15 - 2x + 21$
(2) $5(2x + 11) - 85 = 4(x + 3)$
(3) $x(x - 4) + 8x = 2(7 + 2x) + 2$

b) Bei einem gleichschenkligen Dreieck ist die Länge eines Schenkels dreimal so groß wie die Länge der Basis (Grundseite). Der Umfang des Dreiecks beträgt 1,05 m. Stelle eine entsprechende Gleichung auf und berechne die Länge der Grundseite und der Schenkel.

---

7. a) Wie heißt die kleinste natürliche Zahl, die sowohl durch 36 als auch durch 48 teilbar ist?

b) Wie heißt die größte natürliche Zahl, die sowohl Teiler von 180 als auch Teiler von 216 ist?

c) Das Vorderrad eines Wagens hat einen Umfang von 3,60 m. Das Hinterrad hat einen Umfang von 4,50 m.
(1) Das Vorderrad macht auf einem Weg 75 Umdrehungen. Wie viele Umdrehungen macht das Hinterrad?
(2) Bei einer Fahrt dreht sich das Vorderrad 20 mal mehr als das Hinterrad. Wie oft dreht sich das Vorderrad, wie oft dreht sich das Hinterrad? Welche Strecke wurde dabei zurückgelegt?