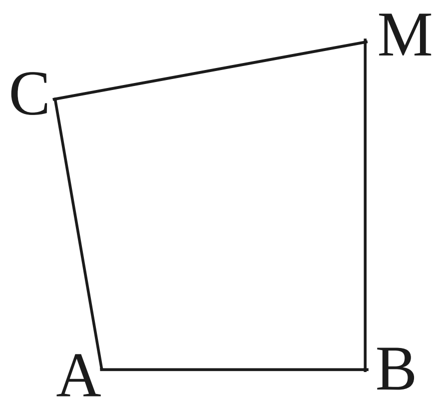
MATHEMATIK-WETTBEWERB 2000/2001 DES LANDES HESSEN

Hinweis : Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

AUFGABEN DER GRUPPE A

1. a) Zeichne das Viereck ABMC mit $|AB| = |AC| = 5$ cm, $\alpha = 100°$ und $\beta = \gamma = 90°$. Spiegele B an MC und C an MB, bezeichne die Bildpunkte mit B' und C'. Zeichne das Viereck BC'B'C.
   b) Berechne die Größe der folgenden Winkel:
   (1) $\measuredangle$CMB,
   (2) $\measuredangle$MBB',
   (3) $\measuredangle$BCB'.
   c) Berechne die Summe $\measuredangle$BCB' + $\measuredangle$CB'C'.
   d) Bestimme α so, dass bei entsprechender Konstruktion BC'B'C ein Quadrat ist.



---

2. a) Kernlose Trauben enthalten 82 % Wasser, der Rest wird als Fruchtfleisch bezeichnet.
   (1) Wie viel kg Wasser sind in 4 kg Trauben enthalten?
   (2) Wie viel kg Trauben enthalten 450 g Fruchtfleisch?
   b) Rosinen sind getrocknete Trauben. Beim Trocknen der Trauben wird nur der Wassergehalt verringert. Der Fruchtfleischanteil in den Rosinen beträgt dann 75 %.
   (1) Wie viel kg Rosinen erhält man aus 4 kg kernlosen Trauben?
   (2) Wie viel kg kernlose Trauben benötigt man zur Herstellung von 1,2 kg Rosinen?

---

3. Gib jeweils die Lösungsmenge in aufzählender Form an; G = $\mathbb{Z}$.
   a) $(x + 2)^2 = 4$
   b) $(x + 4)(x - 4) = 48$
   c) $(x + 4)(x - 4) > 0$
   d) $x^3 - 25x \leq 0$

---

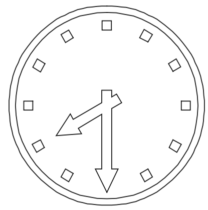
4. a) (1) Die Differenz der natürlichen Zahlen m und n beträgt 12. Welche Zahl muss man zu dem Produkt der beiden Zahlen addieren, damit man stets eine Quadratzahl erhält?
   (2) Multipliziert man die Summe zweier natürlicher Zahlen a und b ($b < a$) mit der Differenz dieser beiden Zahlen, so erhält man 75. Bestimme die Differenz $a - b$. Gib alle Möglichkeiten an.
   b) (1) Die Differenz der Primzahlen p und q mit $p, q > 3$ beträgt 2. Durch welche natürlichen Zahlen ist jeweils die zwischen p und q, liegende Zahl immer teilbar?
   (2) Die Differenz der Primzahlen p und q mit $p, q > 3$ beträgt 2. Durch welche natürlichen Zahlen ist die Summe der beiden Primzahlen immer teilbar?

---

5. a) Zeichne das Rechteck ABCD mit A(0|0), B(6|0), C(6|4) und D(0|4) in ein Koordinatensystem (1 LE = 1 cm) ein. Kennzeichne den Punkt P(2|1) und spiegele diesen Punkt jeweils an den vier Seiten des Rechtecks. U ist der Bildpunkt bei Spiegelung an AB, R ist der Bildpunkt bei Spiegelung an BC, O ist der Bildpunkt bei Spiegelung an CD und L ist der Bildpunkt bei Spiegelung an AD. Zeichne das Viereck ROLU.
   b) Berechne die Flächeninhalte der folgenden Dreiecke:
      (1) ΔAUB
      (2) ΔBRC,
      (3) ΔODC.
   c) Bei entsprechender Spiegelung eines Punktes Q an den Seiten des Rechtecks ABCD besitzen ΔODC und ΔLAD den selben Flächeninhalt. Wo liegt Q? Gib zwei Möglichkeiten an.
   d) Bei entsprechender Spiegelung eines Punktes Q an den Seiten des Rechtecks ABCD entsteht das Drachenviereck ROLU. Wo kann Q liegen?
   e) Bei entsprechender Spiegelung eines Punktes Q an den Seiten des Rechtecks ABCD gilt: |LD| = |DO| = |OC| = |CR| und $\measuredangle$DOC = 90°. Gib die Koordinaten des Punktes Q an.

---

6. a) Eine Uhr wird um 14.00 Uhr gestartet und um 17.45 gestoppt. Welchen Winkel hat der kleine Zeiger in dieser Zeit überstrichen?
   b) Welchen Winkel schließen kleiner und großer Zeiger um 12.17 Uhr ein?
   c) Wie oft zwischen 11.30 Uhr und 12.30 Uhr bilden die beiden Zeiger einen Winkel von 44°? Gib diese Zeiten an.
   d) Manfreds Uhr ist defekt. Bei seiner Uhr bewegt sich der große Zeiger mit doppelter Geschwindigkeit, der kleine Zeiger bewegt sich jedoch korrekt. Zur Kontrolle vergleicht er seine Uhr mit einer genau gehenden Funkuhr. Um 12.00 Uhr zeigen beide Uhren übereinstimmend die selbe Zeit an.
      (1) Wie oft zeigt Manfreds Uhr innerhalb von 24 Stunden die richtige Zeit an?
      (2) Welchen Winkel bilden die Zeiger seiner Uhr, wenn die Funkuhr 13.10 anzeigt?



---

7. a) Alf würfelt 4 mal. Auf dem Würfel befinden sich die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.
      (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei 4 mal eine ‚6' würfelt?
      (2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei dreimal eine ‚6' und einmal keine ‚6' würfelt?
      (3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei mindestens eine ‚6' würfelt?
   b) Bernd würfelt so lange, bis er eine ‚6' erhält.
      (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er 4 mal würfelt?
      (2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er höchstens 4 mal würfelt?

BITTE BEACHTEN :
Angabe der Wahrscheinlichkeiten als Potenz, Produkt oder Summe genügt!

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2000/2001 DES LANDES HESSEN

Hinweis : Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

AUFGABEN DER GRUPPE B

1. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an; $G = \mathbb{Z} = \{...,-2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

   a) $5\cdot(8x - 3) = 3\cdot(8 + 9x)$

   b) $5 - (8x - 3) = 28 - 3\cdot(6x + 7)$

   c) $3x\cdot(6x - 9) < 9x\cdot(2x - 6) - 27$

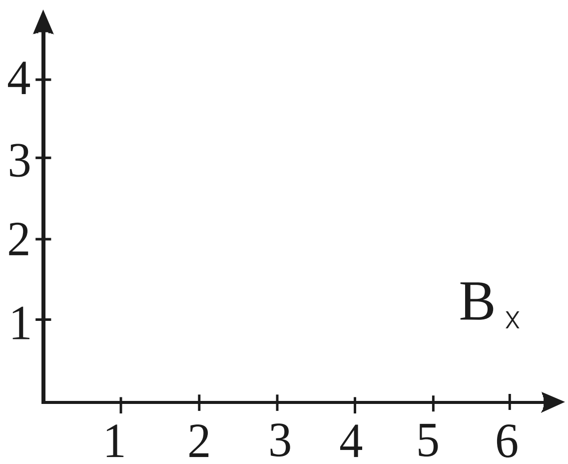
   d) $(2x + 2)\cdot(5 - 3x) - (x - 1) = x\cdot(6x + 3) - 1$

---

2. Für Erdarbeiten benötigen drei Bagger zusammen jeweils 32 Stunden.
   a) Ein Bagger hebt pro Stunde 24 m^3 Erde aus. Wie viel m^3 Erde werden insgesamt ausgehoben?
   b) Wie lange würden acht Bagger für die gleichen Erdarbeiten benötigen?
   c) Wie viele Bagger wären notwendig, wenn die gesamten Arbeiten bereits nach 16 Stunden abgeschlossen sein müssten?
   d) Um wie viele Stunden verlängern sich die Aushubarbeiten, wenn einer der drei Bagger nach acht Arbeitsstunden ausfällt?

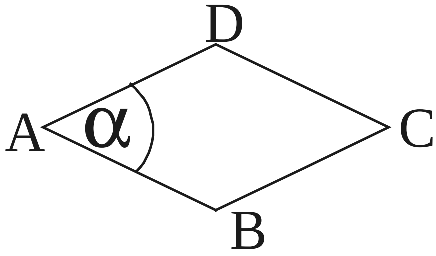
---

3. In einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm ist der Punkt B(6 | 1) eingetragen.
   a) (1) Zeichne in ein entsprechendes Koordinatensystem das Dreieck ABC mit A(0 | 1), B(6 | 1) und C(4 | 5) ein. Zeichne die Höhe h_c mit dem Fußpunkt D ein.
      (2) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
   b) Spiegele die Punkte B und D an der Geraden AC und benenne die Bildpunkte von B und D mit B' und D'. Bestimme den Flächeninhalt des Fünfecks DBCB'D'.
   c) Die Geraden D'D und CB schneiden sich in F.
      (1) Gib die Koordinaten von F an.
      (2) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks DFB.
   d) In einer entsprechenden Figur mit |AD| = |DC| ist $\angle$B'CD' = 20°. Bestimme die Größe des Winkels $\angle$BFD.



---

4. a) Konstruiere das Parallelogramm ABCD mit |AB| = a = 8 cm, $\alpha = 40°$ und $h_a = 3$ cm.
   b) Konstruiere die Raute ABCD mit |AC| = e = 6 cm und $\alpha = 50°$.
   c) Konstruiere alle Dreiecke ABC mit |AB| = c = 5 cm, |AC| = b = 6 cm und $h_b = 3,5$ cm.



---

5. a) Klaus entdeckt folgende Zeitungsanzeige:

Kredit über
12000 DM
für 6 Monate
372 DM Zinsen.

Berechen den Zinssatz!

b) Herr Stein leiht sich 7200 DM von einer Bank zu einem Zinssatz von 15 %. Für diesen Betrag muss er 60 DM Zinsen bezahlen. Wie lange hat er das Geld geliehen?

c) Herr Meier legt 120000 DM zu 5 % für 2 Jahre an. Die Zinsen werden nach einem Jahr gutgeschrieben, wodurch sich das Kapital erhöht.
(1) Gib den Kontostand nach zwei Jahren an!
(2) Um wie viel Prozent hat sich das Kapital insgesamt erhöht?

---

6. a) Ersetze das Symbol □ durch die Rechenzeichen **+, – ,** • und **:** sowie x durch ganze Zahlen derart, dass jeweils wahre Aussagen entstehen. Gib jeweils alle Möglichkeiten an!

(1) $(-35) \square x = 7$

(2) $50 \square x = 50$

(3) $x \square (-10) = -20$

(4) $x \square x = -18$

(5) $x \square x = 64$

b) Welche Zahlen erfüllen nachfolgende Gleichungen? Gib jeweils alle Möglichkeiten an!

(1) $x^2 = x \cdot x$

(2) $x^2 = x + x$

---

7. Handys haben einen vierstelligen PIN–Code.

a) Max hat die Ziffern der letzten beiden Stellen seines Codes vergessen. Er weiß jedoch, dass die Ziffer an der 3. Stelle doppelt so groß war, wie die an der 4. Stelle. Die beiden ersten Ziffern seines PIN–Codes sind 1 und 3. Notiere alle Möglichkeiten!

b) Die 4 Ziffern eines PIN–Codes sollen ein Geburtstagsdatum repräsentieren. Zum Beispiel: 1. Juni entspricht 0106. Wie viele PIN–Codes können für das Jahr 2001 vergeben werden?

c) Wie viele Möglichkeiten für einen PIN–Code gibt es, wenn alle Ziffern beliebig gewählt werden können?

d) Hans will seinen PIN–Code so wählen, dass die rechts stehende Ziffer jeweils um 1 größer ist als die links stehende. Notiere alle Möglichkeiten.

e) Moritz hat seinen PIN–Code vergessen, er weiß jedoch, dass die Ziffer 3 genau zweimal vorkommt und dass diese Ziffern benachbart waren. Wie viele Möglichkeiten gibt es für seinen PIN–Code?

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2000/2001 DES LANDES HESSEN

Hinweis : Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

AUFGABEN DER GRUPPE C

1. a) Ein Auto wird für 32500 DM angeboten. Herr Meyer kauft es und erhält einen Preisnachlass von 4 %.
   (1) Wie viel DM beträgt der Preisnachlass?
   (2) Wie viel DM muss Herr Meyer bezahlen?
   b) Der Preis eines Autos wird von 36000 DM auf 33120 DM herabgesetzt.
   (1) Wie viel DM beträgt die Preissenkung?
   (2) Wie viel Prozent beträgt die Preissenkung?
   c) Herr Kurz erhält beim Kauf eines Autos 5 % Preisnachlass, das sind 2200 DM. Für wie viel DM wurde das Auto ursprünglich angeboten?

---

2. a) Berechne den Wert des Terms!

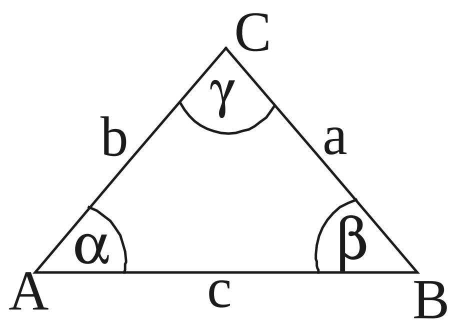
(1) $15x - 12y$	für $x = 3$ und $y = 2$
(2) $3 \cdot (x + y) + 10$	für $x = 10$ und $y = -8$
(3) $5x - 2y - 1$	für $x = 2$ und $y = 0$
(4) $5 - (x - 1) + 10$	für $x = 2$

   b) Gib die jeweilige Lösungsmenge an; $G = \mathbb{Z} = \{\ldots,-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
   (1) $5 \cdot (x + 3) = 25$
   (2) $10x + 2 = 6x + 30$

   c) Das Dreifache einer Zahl vermehrt um 2 ist so groß wie das Vierfache dieser Zahl vermindert um 3. Wie heißt diese Zahl?

---

3. a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 7$ cm, $b = 6$ cm und $c = 5$ cm.
   b) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 6$ cm, $b = 5$ cm und $\alpha = 70°$.
   c) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $b = 6$ cm, $\alpha = 50°$ und $\beta = 75°$.
   d) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 6$ cm, $\alpha = 80°$ und $h_c = 6$ cm.



---

4. Ein Aquarium hat die folgenden Innenmaße: 96 cm lang, 50 cm breit und 60 cm hoch.
   a) (1) Wie viel cm^3 Wasser müssen in das Aquarium hineingegossen werden, bis es randvoll gefüllt ist?
   (2) Wie viel Liter sind dies?
   b) Das Aquarium soll zu $\frac{5}{6}$ mit Wasser gefüllt werden. Wie viel Liter Wasser werden dazu benötigt?
   c) In das Aquarium werden 192 Liter Wasser eingefüllt. Wie hoch steht dann das Wasser im Aquarium?
   d) Die Glaswände des Aquariums sind 1 cm dick. Berechne die Außenmaße des Aquariums.

---

5. a) Familie Anton (2 Erwachsene, 1 Kind) fährt in den Urlaub. Es entstehen folgenden Kosten:
Bahnfahrt für einen Erwachsenen: 196 DM - das Kind bezahlt die Hälfte,
Hotelübernachtung für einen Erwachsenen 85 DM pro Tag, 35 DM für ein Kind.
Wie viel DM bezahlt Familie Anton für die Fahrt und für 14 Übernachtungen in diesem Hotel?
b) Herr Braun bezahlt für 7 Übernachtungen in einem Hotel 1610 DM. Er verlängert seinen Aufenthalt in diesem Hotel um 5 Tage. Wie viel DM muss Herr Braun nun für die Übernachtungen in diesem Hotel insgesamt bezahlen?
c) In der Hauptsaison kostet eine Übernachtung im Hotel Sonne 90 DM, in der Nebensaison 72 DM. Herr Müller bucht 16 Übernachtungen in der Hauptsaison. Wie viele Übernachtungen könnte er in der Nebensaison für den gleichen Gesamtpreis buchen?

---

6. Bei einem Würfelspiel wird mit 3 Würfeln gleichzeitig geworfen. Auf jedem Würfel befinden sich die Augenzahlen –1, +2, –3, +4, –5, +6.
a) Die Augenzahlen werden addiert. **Elke erzielte die größtmögliche Summe, Franz die kleinstmögliche Summe.** Fülle die Tabelle aus.

	1. Würfel	**2. Würfel**	**3. Würfel**	**Summe**
Andi	**+2**	**–3**	**+6**	
Bernd		**+6**	**–3**	**+7**
Claudia	**–3**	**–3**	**–5**	
Diana	**–1**	**–5**		**–4**
Elke				
Franz				

b) Die Augenzahlen werden miteinander multipliziert. **Elke erzielt das größtmögliche Produkt, Franz das kleinstmögliche Produkt.** Fülle die Tabelle aus.

	1. Würfel	**2. Würfel**	**3. Würfel**	**Produkt**
Andi	**+2**	**+4**	**–5**	
Bernd	**–3**	**–5**	**+2**	
Claudia	**+4**	**+4**		**+96**
Diana		**+4**	**–3**	**+12**
Elke				
Franz				

---

7. Das Waschmittel „Super“ gibt es in 3 Packungsgrößen zu kaufen:
500 g für 1,80 DM,
3 kg für 10,00 DM,
10 kg für 30,00 DM.
a) (1) Wie viel DM kosten 4 kg „Super“, wenn man nur Packungen zu 500 g kauft?
(2) Wie viel DM kosten 4 kg „Super“, wenn man eine Packung zu 3 kg kauft und den Rest in Packungen zu 500 g?
b) Frau Mayer kauft 8 kg „Super“.
(1) Wie viel DM bezahlt sie, wenn sie möglichst preiswert einkauft?
(2) Wie viel DM würde sie jedoch pro kg sparen, wenn sie ein 10–kg–Paket gekauft hätte?
c) Die Wäscherei Schwarz kauft für 149 DM „Super“, es sind jedoch keine 10–kg–Packungen vorrätig.
(1) Wie viel kg „Super“ erhält sie?
(2) Wie viel kg „Super“ hätte sie mehr erhalten können, wenn 10–kg–Packungen vorrätig gewesen wären und sie 1,00 DM mehr ausgegeben hätte?
