MATHEMATIK-WETTBEWERB 2001/2002 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE A

Hinweis : Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib jeweils die Lösungsmenge in aufzählender Form an; $G = \mathbb{Z}$.

   a) $(x - 3)(x + 4) < (x + 6)(x - 2)$

   b) $(x^2 - 9)(x^2 + 9) = x^2(x^2 - 1)$

   c) $(x + 2)^8 = (x + 2)^4$

   d) $(x - 8)(x + 8)^2 \geq (x + 8)^2$

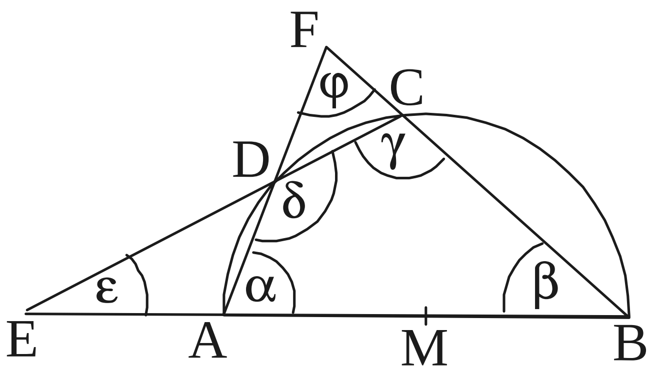
---

2. a) Konstruiere alle Rechtecke ABCD mit $|AC| = 6$ cm; der Abstand des Punktes B von AC beträgt 2 cm.
   b) Konstruiere das Trapez ABCD mit $AB \parallel DC$ und $\alpha = 60°$, $h = 6$ cm, die Mittellinie $m = 5$ cm; die Differenz der beiden parallelen Seiten ist 5 cm.
   c) Konstruiere das Viereck ABCD mit $|AB| = 6$ cm, $\beta = 100°$, $|AC| = 8$ cm, $\delta = 80°$ und $|AD| = 5$ cm.

---

3. In nebenstehender Figur liegen die Punkte A, B, C und D auf einem Halbkreis mit dem Mittelpunkt M.
   a) Es ist $\alpha = 70°$ und $\beta = 50°$.
      (1) Zeige, dass das Dreieck DMC gleichseitig ist.
      (2) Berechne die Größe des Winkels ε.
      (3) Beweise: $|EA| = |AC|$

   b) Beweise:
      In jeder entsprechenden Figur gilt
      $\alpha - \gamma = \varepsilon - \varphi$



---

4. Das Hotel Sonnenschein hat 50 Doppelzimmer und 20 Apartments. Ein Doppelzimmer kostet pro Tag 160 €, ein Apartment ist 25 % teurer.
   a) Lara bucht ein Last-Minute-Angebot, das 40 % Nachlass gewährt. Wie viel zahlt sie für ein Apartment pro Tag?
   b) Das Hotel hat ein „6=5“ Angebot: Wer 6 Tage bucht, braucht nur für 5 Tage zu bezahlen. Wie viel Prozent beträgt der Nachlass bei diesem Angebot?
   c) Ohne Nutzung von Sonderangeboten betrugen an einem Tag die Einnahmen 7200 €. Wie viele Doppelzimmer, wie viele Apartments waren an diesem Tag belegt? Gib alle Möglichkeiten an.
   d) Ein Sportverein hatte für 9000 € pro Tag alle Zimmer und Apartments dieses Hotels gebucht. Der prozentuale Preisnachlass für ein Doppelzimmer war doppelt so groß wie der für ein Apartment. Wie viel kostete ein Doppelzimmer, wie viel kostete ein Apartment?

---

5. Betrachte alle zwei- bis vierstelligen Jahreszahlen von Christi Geburt bis heute. Manche Jahreszahlen sind symmetrisch, was die Anordnung der Ziffern anbelangt, z.B. die Jahre 11, 373, 1991 und natürlich 2002.
   a) Nenne die fünf letzten symmetrischen Jahreszahlen!
   b) Zwischen den benachbarten symmetrischen Jahreszahlen 1881 und 1991 vergingen 110 Jahre, jedoch zwischen den benachbarten symmetrischen Jahreszahlen 1991 und 2002 nur 11 Jahre. Bestimme alle Zeiträume, die zwischen zwei benachbarten symmetrischen Jahreszahlen von 10 n. Chr. bis heute aufgetreten sind!
   c) Wird es in ferner Zukunft irgendwann einmal zwei benachbarte symmetrische Jahreszahlen geben, zwischen denen
   (1) genau 100 Jahre liegen,
   (2) genau 555 Jahre liegen?
   Gib ggf. zwei benachbarte symmetrische Jahreszahlen an oder begründe deine Antwort!

---

6. Betrachte folgende Tabelle:

n	**n^3**
1	$1^3 = 1$
2	$2^3 = 3 + 5$
3	$3^3 = 7 + 9 + 11$
4	$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$
....	**.....**

   a) Ergänze die Tabelle für n = 6 .
   b) Wie lautet der mittlere Summand der Summendarstellung für n = 15?
   c) Die Summe des kleinsten und des größten Summanden einer Summendarstellung beträgt 242. Bestimme n.
   d) Bestimme den kleinsten und den größten Summanden der entsprechenden Summendarstellung von 100^3.
   e) Für welches n enthält die Summendarstellung den Summanden 999?

---

7. Eine Umfrage ergab, dass 80 % der Jugendlichen Handys der Firma ALPHA kennen. 90 % der Jugendlichen kennen das Erfrischungsgetränk BETA.
   a) Ein Schüler wird zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er
   (1) ALPHA und BETA kennt?
   (2) ALPHA kennt, aber BETA nicht kennt?
   (3) nur eines der beiden Produkte kennt?
   b) Fünf Schüler werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   (1) alle ALPHA und BETA kennen?
   (2) zwei ALPHA und BETA kennen und drei weder ALPHA noch BETA kennen?
   (3) genau vier Schüler kennen ALPHA und BETA?

   Bitte beachten:
   Die Ergebnisse können auch als Summe oder als Produkt angegeben werden!

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2001/2002 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE B

Hinweis : Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib jeweils die Lösungsmenge in aufzählender Form an; $G = \mathbb{Z}$.

   a) $7(4x + 5) = 12x - 45$

   b) $8(4x - 5) < 13(x - 5)$

   c) $(4x - 5)^2 < (4x^2 - 5) \cdot 4$

   d) $(4x - 6)(4x + 6) - (5x - 5) = -7 - 5x(-2x + 1)$

---

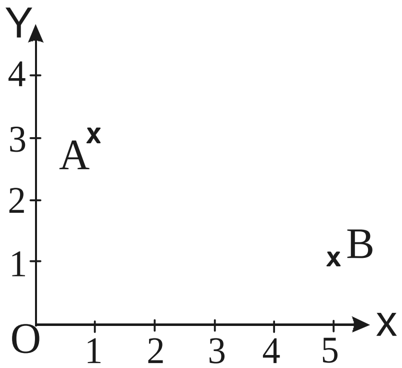
2. a) Herr Schäfer benötigt für einen Autokauf einen Kredit von 6000 € für 72 Tage. Wie viel € Zinsen muss er bezahlen, wenn der Zinssatz 6,5 % beträgt?

   b) Herr Neumann hat wegen eines Autokaufs sein Konto für 10 Tage um 6450 € überzogen. Er muss dafür 21,50 € Zinsen bezahlen. Wie hoch ist der Zinssatz?

   c) In der Kfz-Haftpflichtversicherung ist bei vierteljährlicher Zahlungsweise der jährliche Versicherungsbeitrag um 5 % teurer als bei einer einmaligen Zahlung des gesamten Jahresbeitrages. Herr Groß zahlt vierteljährlich jeweils 162,75 €.
   (1) Wie hoch ist der Jahresbeitrag bei einmaliger Zahlungsweise?
   (2) Wie viel € kann Herr Groß bei jährlicher Zahlungsweise einsparen?

---

3. a) A(1|3) und B (5|1) sind die Eckpunkte des im Koordinatensystem (Einheit 1 cm) gezeichneten Quadrates ABCD.
   (1) Zeichne das Quadrat ABCD und gib die Koordinaten von C und D an.
   (2) Die Mittelsenkrechte m zu $\overline{AB}$ schneidet die x-Achse in F, die Mittelsenkrechte n zu $\overline{BC}$ schneidet die y-Achse in H; m und n schneiden sich in M. Zeichne m, n und markiere H, F und M.
   (3) Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks OFMH.



   b) Zeichne um A einen Viertelkreis im Inneren des Quadrates mit $r = |AB|$. Der Schnittpunkt mit m sei Q, der Schnittpunkt mit n sei P.
   (1) Berechne die Größe des Winkels $\measuredangle BAQ$.
   (2) Berechne die Größe des Winkels $\measuredangle QDC$.

   c) In einer entsprechenden Figur sei $|AB| = 8$ cm. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks APQ.

---

4. Zum Lösen der folgenden Aufgaben ist zunächst eine entsprechende Gleichung aufzustellen.

   a) Aus 8 m Draht soll das Kantenmodell eines Quaders mit quadratischer Grundfläche gebaut werden. Die Höhe soll das Doppelte der Grundseite betragen. Wie lang wird die Grundseite, wenn der Draht völlig aufgebraucht werden soll?

   b) Eine Tippgemeinschaft besteht aus 4 Personen, die sich mit folgenden Einsätzen beteiligten: 2 €, 3 €, 4 € und 6 €. Ein Gewinn von 75450 € soll entsprechend des Einsatzes aufgeteilt werden. Wie viel € erhält jeder?

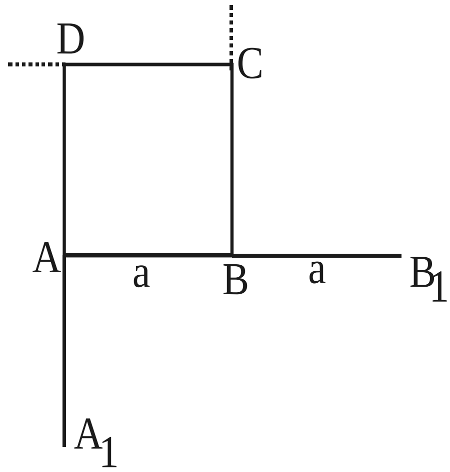
   c) Bei einer 4 x 400 m Staffel lief der 1. Läufer 2 Sekunden schneller als der 2. Läufer. Der 3. Läufer 5 Sekunden langsamer als der 2. Läufer und der 4. Läufer 10 Sekunden schneller als der 3. Läufer. Als Gesamtzeit erreichte die Staffel 3 Minuten und 34 Sekunden. Bestimme die Zeiten aller Läufer.

---

5. a) Konstruiere das Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$, $|AC| = b = 4$ cm und $|BC| = a = 3$ cm.
   (1) Ergänze das Dreieck ABC mittels einer Punktspiegelung zum Rechteck AEBC. Zeichne den Spiegelpunkt S ein.
   (2) Ergänze das Dreieck ABC mittels Geradenspiegelung zu einem Drachenviereck AFBC.
   (3) Wie lang müsste die Seite a des Dreiecks ABC gewählt werden, damit die Punkte E und F aufeinander fallen?
   (4) Konstruiere einen Punkt D so, dass das Viereck ABCD ein symmetrisches Trapez ist.
   b) Konstruiere ein Trapez mit $|AB| = a = 6$ cm und $a \parallel c$ so, dass bei einer Spiegelung an a ein regelmäßiges Sechseck entsteht. Zeichne das Sechseck.

---

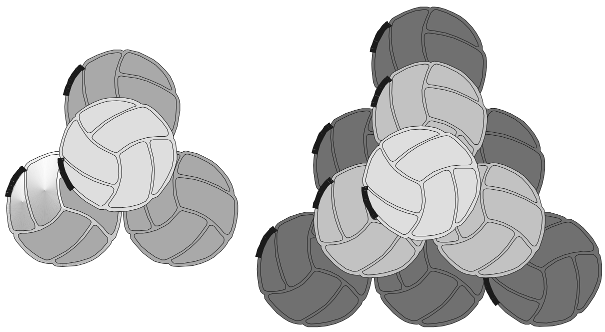
6. In nebenstehender Figur sei ABCD ein Quadrat mit der Seitenlänge a = 2 cm.



   a) (1) Verlängere die Seite $\overline{DA}$ über A hinaus um a. Du erhältst A_1. Verlängere entsprechend $\overline{AB}$ über B, $\overline{BC}$ über C und $\overline{CD}$ über D hinaus. Du erhältst B_1, C_1 und D_1.
   (2) Wie oft ist der Flächeninhalt des Quadrates ABCD im Flächeninhalt des Quadrates $A_1B_1C_1D_1$ enthalten?
   b) (1) Verlängere nun entsprechend die Seiten des Quadrates ABCD um 2a. Du erhältst das Quadrat $A_2B_2C_2D_2$.
   (2) Wie oft ist der Flächeninhalt des Quadrates ABCD im Flächeninhalt des Quadrates $A_2B_2C_2D_2$ enthalten?
   c) Auf das Wievielfache vergrößert sich die Fläche des Quadrates ABCD bei Verlängerung der Quadratseite um 7a?
   d) Die Fläche eines Quadrates $A_nB_nC_nD_n$ sei 221 mal größer als die des Quadrates ABCD und ist durch Verlängerung der Seiten um n•a entstanden. Ermittle n!

---

7. Die Abbildung zeigt die ersten zwei einer Folge von Pyramiden. Jede Pyramide wird aus gleich großen Bällen gebaut. Die 1. Pyramide besteht aus drei Bällen in der 1. Ebene und einem Ball in der 2. Ebene. Die 2. Pyramide besteht aus sechs Bällen in der 1. Ebene, drei Bällen in der 2. Ebene und einem Ball in der 3. Ebene.



   a) (1) Bestimme die Anzahl der Bälle der 3. und 4. Pyramide in der 1. Ebene.
   (2) Bestimme die Anzahl der Bälle der 10. Pyramide in der 1. Ebene.
   (3) Bestimme die Anzahl der Bälle der 5. Pyramide in der 2. Ebene.
   (4) Bei einer Pyramide dieser Art liegen in der 6. Ebene 3 Bälle. Wie viele Bälle liegen in der 1. Ebene dieser Pyramide?
   (5) Bei einer Pyramide dieser Art liegen in der 3. Ebene 78 Bälle und in der 4 Ebene 66 Bälle. Wie viele Bälle liegen in der 7. Ebene dieser Pyramide?
   b) (1) Bestimme die Gesamtzahl der Bälle der 5. Pyramide.
   (2) Eine Pyramide dieser Art besteht aus insgesamt 120 Bällen. Auf wie vielen Ebenen sind diese Bälle angeordnet?

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2001/2002 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE C

Hinweis : Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Zeichne das Schrägbild eines Quaders mit den Kantenlängen a = 12 cm, b = 6 cm und c = 3 cm.
   b) Wie groß sind Volumen und Oberfläche dieses Quaders?
   c) Die Kanten eines anderen Quaders sind alle doppelt so groß.
      (1) Wie groß sind Volumen und Oberfläche des zweiten Quaders?
      (2) Mit welcher Zahl muss man das Volumen des ersten Quaders multiplizieren, um auf die Größe des Volumens des zweiten Quaders zu kommen?
      (3) Mit welcher Zahl muss man Oberfläche des ersten Quaders multiplizieren, um auf die Größe der Oberfläche des zweiten Quaders zu kommen?
   d) Von einem Quader mit 320 cm^3 Volumen ist nur eine Kantenlänge von 10 cm bekannt. Wie lang können die beiden anderen Kanten sein? Gib drei Möglichkeiten an.

---

2. Bei den Ferienspielen der Stadt Alphatown werden verschiedene Angebote gemacht.
   a) (1) Der lange Kinonachmittag kostet 16 € pro Karte. Für die Teilnehmer der Ferienspiele gibt es 15 % Rabatt. Wie teuer ist eine Karte?
      (2) Kinder unter 12 Jahren bekommen auf den ermäßigten Preis noch einen zusätzlichen Nachlass von 5 %. Wie teuer ist die Karte für einen Zehnjährigen?
   b) Der Preis für eine Mountain-Biking-Tour wurde von 32 € auf 28 € pro Teilnehmer gesenkt.
      (1) Wie viel Prozent beträgt die Preissenkung?
      (2) Was bezahlt eine Gruppe von 38 Teilnehmern insgesamt?
   c) Der Segelkurs wurde um 10 € teurer. Das sind 16 %. Berechne den alten und den neuen Preis.

---

3. a) Übertrage die Tabelle und fülle sie aus.

x	**y**	**Term 4•(y + 1) + 1,5x**	**Wert des Terms**
4	**7**		
0	**–2**		
	–5		**–25**

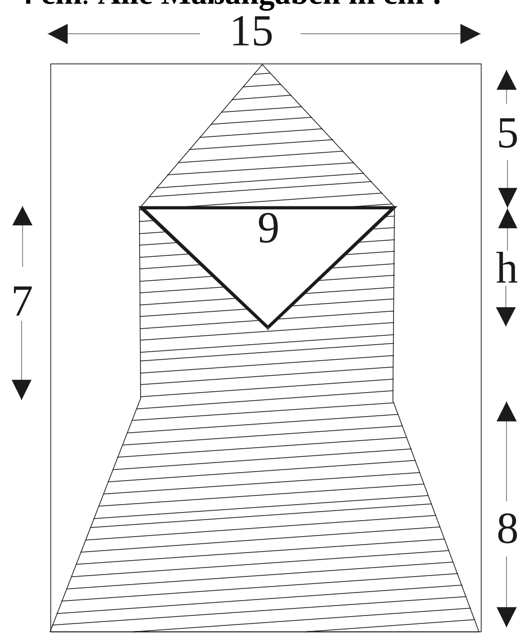
   b) Gib die Lösungsmenge in aufzählender Form ($G = \mathbb{Z}$) für die Ungleichung an.
      $11 - (15 - x) > 11$
   c) „Subtrahiert man 29 vom Zehnfachen einer Zahl, so erhält man die Summe aus 79 und der gesuchten Zahl." Notiere eine entsprechende Gleichung und bestimme die gesuchte Zahl.

---

4. a) Zwei Klassen fahren mit dem Bus gemeinsam zu „Warner Brothers Movie World". Wenn alle 55 Schüler mitfahren, beträgt der Fahrpreis 13,00 € pro Schüler. 5 Schüler fahren jedoch nicht mit. Wie viel muss nun jeder zahlen?
   b) Horst leiht sich einen DVD-Player. Er muss eine einmalige Grundgebühr von 7,25 € und eine tägliche Leihgebühr von 1,75 € bezahlen.
      (1) Wie viel muss er für 3 Tage bezahlen?
      (2) Wie viel muss er für eine Woche bezahlen?
      (3) Er hat 16 € zur Verfügung. Wie lange kann er das Gerät ausleihen?
   c) Jan und Peter geben Nachhilfestunden. Jan verlangt für 6 Unterrichtsstunden 36 € und Peter für 9 Unterrichtsstunden 48,60 €. Peters Unterrichtsstunden dauern 45 Minuten, Jan unterrichtet 60 Minuten. Wer lässt sich besser bezahlen?

---

5. a) Berechne die Größe der schraffierten Fläche, wenn **h = 4 cm**. **Alle Maßangaben in cm !**
   b) Wie viel Prozent der rechteckigen Gesamtfläche sind schraffiert?
   c) Die schraffierte Fläche soll 50 % der Gesamtfläche betragen. Wie groß muss dann die Höhe h des unschraffierten Dreiecks sein?



---

6. Bestimme jeweils den Platzhalter. Beachte: Gleiche Platzhalter in einer Aufgabe bedeuten gleiche Zahlen. Gib jeweils alle Möglichkeiten an.

a) $\frac{\quad}{4} \cdot 4 = 3$	g) $\frac{1}{3} : \quad = 3$
b) $\quad + 29 = 18$	h) $6 - \quad = 4\frac{3}{8}$
c) $\quad + \quad + \quad + \quad = 64$	i) $3 \cdot \quad + 90 = 21 \cdot$
d) $20 + 4 \cdot \quad = 72$	j) $\quad \cdot \quad \cdot \quad = 343$
e) $\frac{10}{\quad} = -0{,}5$	k) $(\quad + \quad) \cdot \quad = 72$
f) $\quad \cdot \quad = 196$	l) $5 \cdot (\quad - 1) = 85$

---

7. Ergänze die fehlenden Zahlen in den Zahlenfolgen!

   a) 5; 14; 7; 16; 9; 18; 11; __ ; __;
   b) 7; 21; 24; 38; 41; 55; 58; __; __;
   c) __; __; 2; 4; 8; 16; 32
   d) 85; 66; 47; __; 9; __;
   e) 8; 10; 13; 17; __; __; 35; 43
   f) 4; 2; 6; 4; 12; 10; 30; __; __ ;
