Mathematik-Wettbewerb 2001/2002 des Landes Hessen

3. RUNDE - LÖSUNGEN DER AUFGABENGRUPPE A

1. a) $\mathbb{L} = \{1, 2, 3,...\}$
   b) $\mathbb{L} = \{9, -9\}$
   c) $\mathbb{L} = \{-1, -2, -3\}$
   d) $L = \{9, 10, 11, 12, ...\} \cup \{-8\}$

---

2. a) Es können zwei Rechtecke konstruiert werden; der Thaleskreis über der Strecke $\overline{AC}$ schneidet die Parallele zu AC (Abstand 2 cm) zweimal, die Dreiecke ABC bzw. AB*C können jeweils zu einem Rechteck ergänzt werden (Parallelen zu AB durch C und zu BC durch A).
   b) Konstruktion Trapez ABCD; Konstruktionshinweise: Parallelen im Abstand h = 6 cm, Mittellinie m und Antragung von α, Ergänzung zum Parallelogramm durch eine Parallele zu AD; für den Schnittpunktes E dieser Parallelen mit AB gilt: $|BE| = 2{,}5$ cm.
   Alternative: Es können auch a = 7,5 cm und b = 2,5 cm berechnet werden.
   c) Konstruktion Viereck ABCD; Konstruktionshinweise: Konstruktion des Teildreiecks ABC (SSW-Konstruktion), Antragung von δ, Kreis um A mit r = 5 cm.

---

3. a) (1) Nachweis: Es ist $\triangle CMD = 60°$ und demnach ist das Dreieck DMC ist gleichschenklig.
   (2) $\varepsilon = 20°$
   (3) Nachweis: Es gilt: $\gamma = 100°$ und $\triangle ACB = 90°$, daraus folgt, dass die Basiswinkel im Dreieck EAC gleich groß sind, demnach $|EA| = |AC|$.
   b) Nachweis: Es gilt $\alpha + \varphi = 180° - \beta$ und $\varepsilon + \gamma = 180° - \beta$.

---

4. a) 120,00 € sind pro Tag zu zahlen.
   b) $16\frac{2}{3}$ % beträgt der Nachlass.
   c) (45 DZ; 0 AP), (40 DZ; 4 AP), ..., (20 DZ; 20 AP), es gilt: $160x + 200y = 7200$.
   d) Ein Doppelzimmer kostet 112 € (30 % Nachlass), ein Apartment kostet 170 € (15% Nachlass)

---

5. a) 2002, 1991, 1881, 1771, 1661 oder 1991, 1881, 1771, 1661, 1551
   b) 2, 10, 11, 110
   c) (1) Ja, z.B. 10101 und 10201.
   (2) Nein.

---

6. a) $6^3 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$
   b) 225
   c) n = 11
   d) $9901 = 100^2 - 99$ und $10099 = 100^2 + 99$
   e) n = 32

---

7. a) (1) $p = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$
   (2) $p = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08$
   (3) $p = 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}26$
   b) (1) $p = (0{,}8 \cdot 0{,}9)^5 = 0{,}72^5$
   (2) $p = 10 \cdot (0{,}8 \cdot 0{,}9)^2 \cdot (0{,}1 \cdot 0{,}2)^3$
   (3) $p = 5 \cdot (0{,}8 \cdot 0{,}9)^4 \cdot (0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}9)$

---

3. RUNDE - LÖSUNGEN DER AUFGABENGRUPPE B

1. a) $\mathbb{L} = \{-5\}$
   b) $\mathbb{L} = \{-2, -3, -4, ...\}$
   c) $\mathbb{L} = \{2, 3, 4, ...\}$
   d) $\mathbb{L} = \{2, -2\}$

---

2. a) Es sind 78,00 € an Zinsen zu zahlen.
   b) 12 % beträgt der Zinssatz.
   c) (1) 620,00 € ist der Jahresbeitrag.
   (2) 31,00 € können bei jährlicher Zahlungsweise eingespart werden.

---

3. a) (1) C (7|5) und D (3|7)
   (2) F(2|0), H(0|6) und M(4|4)
   (3) A =16 cm^2
   b) (1) $\triangle$BAQ = 60°
   (2) $\triangle$QDC = 15°
   c) A = 16 cm^2

---

4. a) Die Grundseite ist 0,5 m lang, denn es gilt: $8x + 4 \cdot 2x = 8$
   b) Der Gewinn verteilt sich zu: 10060 €, 15090 €, 20120 €, 30180 €, denn
   $2x + 3x + 4x + 6x = 75450$
   c) 1. Läufer 52 s, 2. Läufer 54 s, 3. Läufer 59 s, 4. Läufer 49 s, denn
   $x - 2 + x + x + 5 + (x + 5) - 10 = 214$, wobei die Zeit des 2. Läufers mit x bezeichnet wird.

---

5. a) Konstruktion des Dreiecks ABC (SWS-Konstruktion)
   (1) Das Rechteck AEBC erhält man durch Punktspiegelung am Mittelpunkt der Seite c.
   (2) Durch Spiegelung der Geraden AB erhält man das Drachenviereck AFBC
   (3) a = 4 cm
   (4) Das Trapez erhält man durch Spieglung von C an der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.
   b) Konstruktion des Trapezes und Spiegelung; Hinweise: die Innenwinkel des regelmäßiges Sechsecks sind 120 ° groß, demnach gilt für das Trapez: $\alpha = \beta = 60°$. Beachte: Ein regelmäßiges Sechseck besitzt einen Umkreis!

---

6. a) (1) Zeichnung des Quadrats $A_1B_1C_1D_1$
   (2) 5 mal
   b) (1) Zeichnung des Quadrats $A_2B_2C_2D_2$
   (2) 13 mal
   c) 113 mal
   d) n = 10

---

7. a) (1) 10 Bälle
   15 Bälle
   (2) 66 Bälle
   (3) 15 Bälle
   (4) 28 Bälle
   (5) 36 Bälle
   b) (1) 56 Bälle
   (2) 8 Ebenen

---

3. RUNDE - LÖSUNGEN DER AUFGABENGRUPPE C

1. a) Schrägbild des Quaders; beachte: 45° Winkel und Halbierung der Seiten.
   b) Volumen $V_1 = 216\ cm^3$; Oberfläche $A_1 = 252\ cm^2$
   c) (1) $V_2 = 1728\ cm^3$
      (2) $V_2 = 8 \cdot V_1$
      (3) $A_2 = 4 \cdot A_1$
   d) a = 1 cm und b = 32 cm; a = 2 cm und b = 16 cm; a = 4 cm und b = 8 cm
      (oder andere Möglichkeiten, für die gilt $a \cdot b = 32\ cm^2$)

---

2. a) (1) Eine Karte kostet 13,60 €.
      (2) Eine Karte für einen Zehnjährigen kostet 12,92 €.
   b) (1) 12,5 % beträgt die Preissenkung.
      (2) 1064,00 € sind für eine Gruppe von 38 Teilnehmern zu zahlen.
   c) Alter Preis: 62,50 €; neuer Preis: 72,50 €.

---

3. a) (1) $T = 4(7 + 1) + 1{,}5 \cdot 4 = 38$
      (2) $T = 4(-2 + 1) + 1{,}5 \cdot 0 = -4$
      (3) $4(-5 + 1) + 1{,}5 \cdot \mathbf{(-6)} = -25$
   b) $\mathbb{L} = \{16, 17, 18, ...\}$
   c) Die gesuchte Zahl ist 12, denn es gilt: $10x - 29 = 79 + x$

---

4. a) 14,30 € muss jeder bezahlen.
   b) (1) 12,50 € für drei Tage
      (2) 19,50 € für eine Woche
      (3) 5 Tage
   c) Peter, denn er erhält 7,20 € pro 60 Minuten; Jan erhält nur 6,00 € pro 60 Minuten.

---

5. a) $163{,}5\ cm^2$
   b) 54,5 %
   c) h = 7 cm

---

6. a) $\square = 3$ b) $\square = -11$
   c) $\square = 16$ d) $\square = 13$
   e) $\square = -20$ f) $\square = -14$ oder $\square = 14$
   g) $\square = \frac{1}{9}$ h) $\square = 1\frac{5}{8}$
   i) $\square = 5$ j) $\square = 7$
   k) $\square = 6$ oder $\square = -6$ l) $\square = 18$

---

7. a) 5; 14; 7; 16; 9; 18; 11; **20 ; 13**;
   b) 7; 21; 24; 38; 41; 55; 58; **72; 75;**
   c) **0,5; 1;** 2; 4; 8; 16; 32;
   d) 85; 66; 47; **28**; 9; **–10;**
   e) 8; 10; 13; 17; **22; 28;** 35; 43;
   f) 4; 2; 6; 4; 12; 10; 30; **28; 84**;
