MATHEMATIK-WETTBEWERB 2002/2003 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE A

Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib jeweils die Lösungsmenge in aufzählender Form an; $G = \mathbb{Z}$.

   a) $x(x-6)(x+5) = 0$

   b) $(x+8)(x^2-3) = (x+8)$

   c) $x(x+8)^2 = 16x(x+4) - 8$

   d) $(x+8)^2 > 16x + 81$

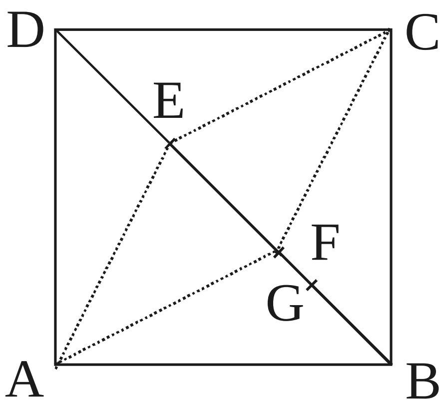
---

2. Gegeben ist das Quadrat ABCD mit der Diagonalen $|BD| = 6$ cm. Die Punkte E und F liegen auf $\overline{BD}$.

   a) Es gilt $|DE| = |EF| = |FB| = 2$ cm. Berechne den Flächeninhalt der Raute AFCE und des Quadrates ABCD.

   b) Es gilt $|DE| = 2$ cm. Der Punkt G liegt auf der Diagonalen $\overline{BD}$ so, dass der Flächeninhalt des Drachens AGCE halb so groß wie der des Quadrates ABCD ist. Wie groß ist dann $|GB|$?

   c) Der Punkt E wird an den vier Quadratseiten gespiegelt. Die Bildpunkte E_1, E_2, E_3 und E_4 bilden ein Viereck. Bestimme dessen Flächeninhalt.



---

3. Das neue Preissystem der Bahn enthält folgende Ermäßigungen vom **Normalpreis**:

   40 % Ermäßigung, wenn die Fahrkarte mindestens sieben Tage vor der Abreise gekauft wird,
   25 % Ermäßigung, wenn die Fahrkarte mindestens drei Tage vor der Abreise gekauft wird,
   10 % Ermäßigung, wenn die Fahrkarte mindestens einen Tag vor der Abreise gekauft wird.
   Mit der BahnCard erhält man zusätzlich auf die ermäßigten Preise 25 % Rabatt.

   a) Herr Meyer kauft zwei Tage vor Reisbeginn eine Fahrkarte, deren Normalpreis 180 € beträgt. Er benutzt seine BahnCard. Wie viel € muss er für die Fahrkarte bezahlen? Wie viel Prozent beträgt die Ermäßigung insgesamt?

   b) Herr Dorn kauft seine Fahrkarte zwei Wochen im Voraus. Er benutzt seine BahnCard und spart insgesamt 110 €. Berechne den Normalpreis seiner Fahrkarte.

   c) Frau Benz kauft ihre Fahrkarte 7 Tage vor der Abreise. Wie viel Prozent hätte sie mehr bezahlen müssen, wenn sie die Fahrkarte einen Tag später gekauft hätte?

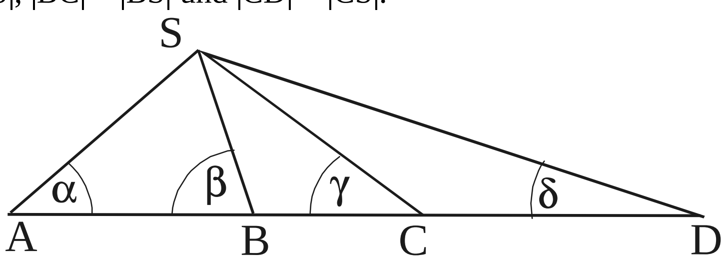
---

4. Nebenstehende Skizze zeigt das Dreieck ADS und die drei gleichschenkligen Dreiecke ABS, BCS und CDS. Es gilt für alle Fragen: $|AB| = |AS|$, $|BC| = |BS|$ und $|CD| = |CS|$.

   a) Es ist $\alpha = 40°$. Bestimme die Größe der Winkel β, γ und δ.

   b) In einer entsprechenden Figur gilt $\gamma = 37{,}5°$. Bestimme die Größe der Winkel α und β.

   c) Wie ist α zu wählen, damit das Dreieck ADS gleichschenklig (mit $|AS| = |SD|$) ist?

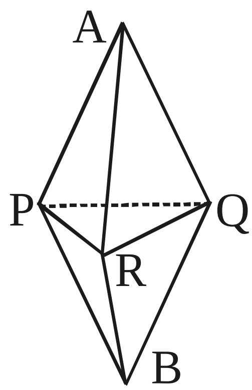


   d) In einer entsprechenden Figur gilt $\alpha = 6\delta$. Wie groß ist dann der Winkel $\measuredangle ASD$?

---

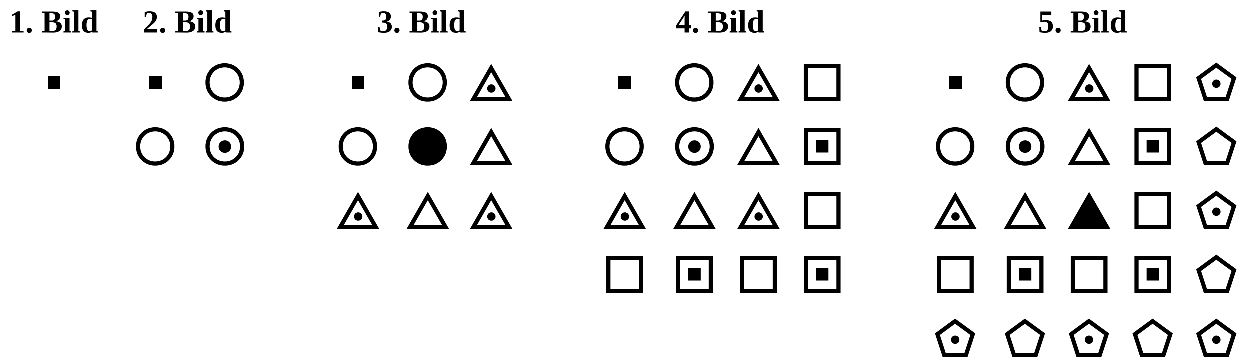
5. Auf einer Rennstrecke fahren funkgesteuerte Modellautos mit konstanter Geschwindigkeit.
   a) Das schwarze Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s, das rote Auto mit 4,5 m/s. Beide starten gleichzeitig auf der 80 m langen Rennstrecke.
      (1) Wie viel Sekunden benötigt das schwarze Auto für diese Strecke?
      (2) Wie viel Meter ist das rote Auto vom Ziel entfernt, wenn das schwarze Auto das Ziel erreicht?
   b) Es starten gleichzeitig drei Autos auf der 80 m langen Rennstrecke. Das schwarze Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s. Wenn das schwarze Auto durch das Ziel fährt, hat das gelbe Auto noch 16 m zu fahren. Wenn das gelbe Auto durch das Ziel fährt, hat das grüne Auto noch 16 m zu fahren.
      (1) Mit welcher Geschwindigkeit fährt das gelbe Auto?
      (2) Mit welcher Geschwindigkeit fährt das grüne Auto?
      (3) Wie viel Meter hat das grüne Auto noch zu fahren, wenn das schwarze Auto das Ziel erreicht?
   c) Auf einer anderen Rennstrecke starten gleichzeitig zwei Modellautos. 4 s nach dem ersten Auto erreicht das zweite Auto das Ziel. Die Autos fuhren mit einer Geschwindigkeit von 6 m/s beziehungsweise 7,5 m/s. Wie lang ist diese Rennstrecke?

6. Auf den Kanten des nebenstehenden Körpers läuft eine Ameise von A nach B. Sie durchläuft keinen Punkt zweimal. An jedem Punkt entscheidet sie sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit für einen der möglichen Wege.



   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit läuft die Ameise den Weg APQB?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt die Ameise nur über zwei Kanten von A nach B?
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlich dafür, dass eine Ameise auf dem Weg von A nach R auf genau 2 Kanten läuft?
   d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit führt der Weg der Ameise von A nach B über den Punkt R?
   e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ameise höchstens drei Kanten für den Weg von A nach B benötigt?

7. Die Abbildung zeigt die ersten fünf Bilder einer Figurenfolge. Jedes Bild besteht aus einzelnen Plättchen. Befindet sich ein Plättchen genau in der Mitte eines Bildes, so ist es schwarz ausgefüllt.



   a) Wie viele Sechsecke enthält das nächste Bild?
   b) Das wievielte Bild besteht aus 169 Plättchen?
   c) Welche Form hat das schwarze Plättchen im 9. Bild?
   d) In welchem Bild gibt es ein schwarz ausgefülltes 17-Eck?
   e) Wie viele schwarze Plättchen sind vom 3. bis zum 333. Bild insgesamt vorhanden?
   f) Im wievielten Bild befinden sich genau 100 Plättchen ohne Punkt auf dem äußeren Rand?
   g) Vom 3. zum 4. Bild kommen 7 Vierecke, also $7 \cdot 4 = 28$ Ecken hinzu. Entsprechend enthält das 5. Bild 45 Ecken mehr als sein Vorgänger. Wie viele Ecken enthält das 30. Bild mehr als das 29. Bild?

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2002/2003 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE B

Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib jeweils die Lösungsmenge in aufzählender Form an.
Grundmenge $G = \mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

   a) $4(x + 2) = 2(x + 4) - 10$

   b) $8(3x - 7) - (4 + 6x) < 12x - 48$

   c) $(3x - 6)^2 > (9x - 6)\cdot x$

   d) $(2x + 4)(x - 3) = (x - 8)(x + 6) + 72$

---

2. a) Die Regional-Bahn fährt in 3 Stunden 20 Minuten eine Strecke von 175 km. Welche Strecke legt dieser Zug in 80 Minuten zurück?
   b) Ein Regional-Express braucht für eine Strecke von 45 km eine Fahrzeit von 36 Minuten. Berechne die durchschnittliche Geschwindigkeit und gib diese in km/h an.
   c) Ein InterRegio benötigt für die Fahrt von Göttingen nach Hannover 1,5 Stunden bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 km/h. Wie viele Minuten braucht ein ICE für diese Strecke bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 150 km/h?
   d) Ein InterCity (IC) legt die Strecke von Kassel nach Fulda bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h fahrplanmäßig in 45 Minuten zurück. Er muss heute eine 5-minütige Verspätung auf dieser Strecke aufholen. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit muss der IC heute fahren?

---

3. a) Chris bekommt zu seinem Geburtstag Geld geschenkt und legt es auf einem Sparbuch an. Nach einem halben Jahr erhält er 2,25 € Zinsen bei einem Zinssatz von 0,75 % pro Jahr. Wie viel Geld hat er eingezahlt?
   b) Nadine hat bei ihrer Bank 3000 € zu einem gleichbleibenden Zinssatz für zwei Jahre angelegt. Am Ende des ersten Jahres erhielt sie 60 € Zinsen, die dem Kapital gutgeschrieben wurden.
   (1) Berechne den Zinssatz.
   (2) Berechne das Endguthaben nach zwei Jahren.
   c) Zur Konfirmation erhält Jasmin von den Großeltern 1000 €. Sie darf den Betrag jedoch nicht sofort ausgeben, sondern soll ihn mindestens zwei Jahre lang fest anlegen. Ihre Bank zahlt im ersten Jahr 2,5% Zinsen, die zu dem Kapital addiert werden. Im zweiten Jahr erhält sie 3% Zinsen.
   (1) Berechne das Endguthaben nach zwei Jahren.
   (2) Um wie viel Prozent ist das Anfangskapital in den zwei Jahren gewachsen?

---

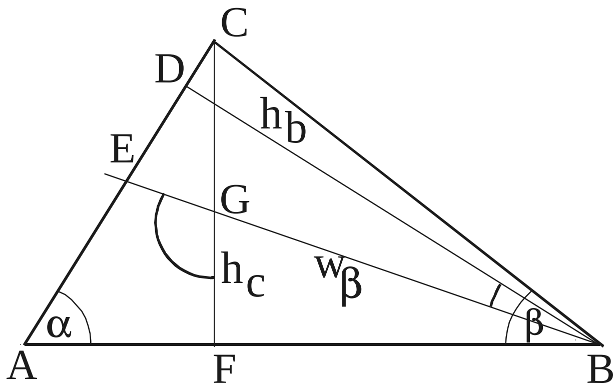
4. a) Die Punkte A(3|1); B(3|7); C(1|5) sind Eckpunkte des achsensymmetrischen Trapezes ABCD in einem Koordinatensystem (Einheit 1 cm). Zeichne das Trapez ABCD und gib die Koordinaten von D an.
   b) (1) Spiegele das Trapez an der Geraden AB und gib die Koordinaten von C’ und D’ an.
   (2) Berechne den Flächeninhalt der Gesamtfigur.
   c) (1) Verschiebe in der vorhandenen Figur das Trapez ABCD so, dass A’’(4,5|1) der Bildpunkt von A ist und zeichne das Trapez A’’B’’C’’D’’.
   (2) Bestimme den Flächeninhalt des Parallelogramms AA’’D’’D.
   d) Bei einer anderen Verschiebung des Trapezes ABCD ist A*(x|1) der Bildpunkt von A. Bestimme x so, dass der Flächeninhalt von AA*D*D $6\ cm^2$ beträgt.

---

5. a) (1) Konstruiere das Dreieck ABC mit a = 7,2 cm; $\gamma = 100°$ und $\beta = 42°$
(2) Konstruiere zu dem Dreieck ABC den Umkreis.
(3) Bei einem anderen Dreieck ABC liegt der Mittelpunkt des Umkreises auf $\overline{AB}$. Wie groß ist der Winkel γ in diesem Dreieck?

b) (1) Konstruiere das Dreieck ABC mit c = 6,7 cm, $h_c = 4{,}4$ cm und $\beta = 58°$.
(2) Konstruiere die Winkelhalbierende w_α .

c) In dem abgebildeten Dreieck ABC sind $\alpha = 58°$ und $\beta = 38°$. Bestimme die Größe der Winkel
(1) $\measuredangle$DBE,
(2) $\measuredangle$EGF.

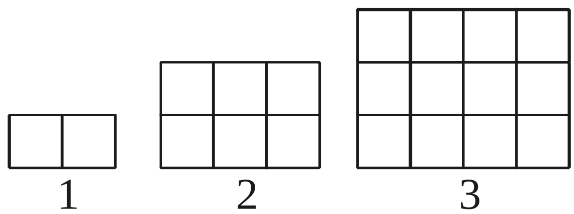


6. a) Ein einfaches Zahlenschloss hat zwei Einstellringe mit jeweils den Ziffern 1 bis 3. Schreibe alle Einstellmöglichkeiten auf.

b) (1) Axel hat für sein Fahrrad ein Zahlenschloss mit vier Einstellringen. Jeder Ring hat die Ziffern von 1 bis 5. Wie viele Zahleneinstellungen gibt es insgesamt?
(2) Axel sagt zu seinem Freund Tim: "In der Zahl, mit der sich mein Schloss öffnen lässt, kommen die Ziffern 1 bis 3 nicht vor."
Nenne vier mögliche Kombinationen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es insgesamt?
(3) Tim antwortet: „Bei meinem Schloss (4 Einstellringe jeweils mit den Ziffern 1 bis 6) ist der Code die fünftgrößte aller möglichen Zahlen." Wie heißt dieser Code?

c) Bei einem anderen Fahrradschloss, bei dem jeder Ring mehr als drei Ziffern hat, gibt es 512 verschiedene Einstellungen.
(1) Wie viele Einstellringe hat das Schloss?
(2) Wie viele verschiedene Ziffern hat ein Einstellring dieses Schlosses?

7 a) Nebenstehende Skizze zeigt eine Folge von Rechtecken, welche aus 1 cm^2 großen Quadraten zusammengesetzt wurden.



Ergänze die Tabelle.

Figur	**1**	**2**		**8**				
Umfang (in cm)	**6**	**10**	**...**		**...**	**66**	**...**	
Flächeninhalt (in cm^2)	**2**							**2550**

b) Eine andere Folge beginnt ebenfalls mit Figur 1, jedoch verdoppeln sich in den folgenden Figuren jeweils Länge und Breite der Figur.
(1) Bestimme Umfang und Flächeninhalt der 4. Figur.
(2) Bei der wievielten Figur beträgt der Umfang 768 cm?
(3) Wie groß ist der Umfang der Figur, deren Flächeninhalt 2048 cm^2 beträgt?

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2002/2003 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE C

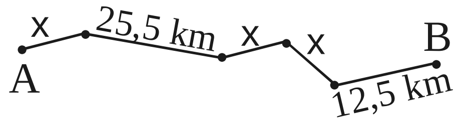
Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Von den 975 Schülerinnen und Schülern einer Schule halten 780 Fast Food für ungesund. Wie viel Prozent sind das?
   b) 24 % der 975 Schülerinnen und Schüler essen als Pausenfrühstück eine Tüte Kartoffelchips. Wie viele Schülerinnen und Schüler sind das?
   c) 12 % der Mädchen einer Schule, dies sind 66 Mädchen, trinken kalorienarme Getränke. Wie viele Mädchen besuchen diese Schule?
   d) Die Klasse 8a hat in der Klassenkasse 90 €. Die 13 Jungen und 7 Mädchen gehen gemeinsam essen. Die Jungen essen jeweils einen Big Mac, die Mädchen essen jeweils eine Portion Chicken McNuggets. Alle trinken eine Cola.
   (1) Wie viel geben die Jungen insgesamt aus?
   (2) Wie viel geben die Mädchen insgesamt aus?
   (3) Wie viel Geld bleibt übrig?

Speisekarte	
Big Mac	**2,69 €**
Hamburger	**1,15 €**
Cheeseburger	**1,30 €**
Chicken McNuggets	**2,70 €**
Cola (0,5 l)	**1,80 €**

---

2. a) Bestimme jeweils x.
   (1) $16x - 36 = 8x + 60$
   (2) $5(2x - 3) + 9 = 54$
   (3) $\frac{4}{5}x - 5 = 3$
   b) Wenn man das 5-fache einer Zahl um 35 vermindert, so erhält man 30. Wie heißt diese Zahl?
   c) Der Weg von A nach B besteht aus 5 Teilstrecken und ist insgesamt 50 km lang. Stelle eine Gleichung auf und berechne x.



---

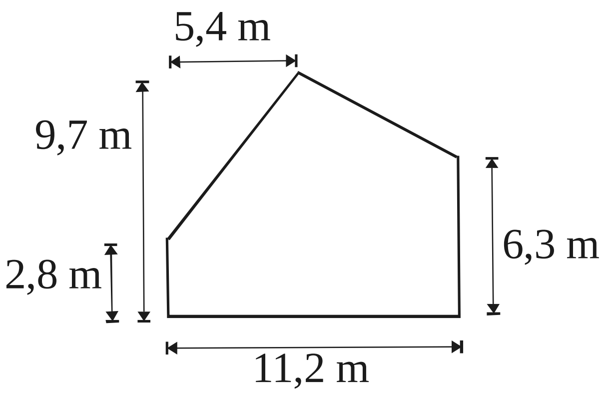
3. a) Die Erde dreht sich in 24 Stunden einmal um sich selbst. Stell dir vor, du sitzt am Äquator, dann legst du mit der Erde in dieser Zeit 40000 km zurück.
   (1) Wie groß ist deine Geschwindigkeit (in km pro Stunde)? Gib das Ergebnis gerundet auf zwei Nachkommastellen an.
   (2) Wie viele Tage und Stunden wäre ein Auto auf der 40000 km langen ‚Äquatorstraße' unterwegs, wenn die Geschwindigkeit gleichmäßig 80 km/h beträgt und das Auto ohne Pause fahren würde?
   (3) Licht hat die Geschwindigkeit 300000 km/s (Kilometer pro Sekunde). Wie lange bräuchte das Licht für eine Äquatorrunde?
   b) Eine Schnecke kriecht in einer Sekunde 5 mm weit. Wie viel Meter könnte sie an einem Tag schaffen, wenn sie ständig unterwegs wäre?

---

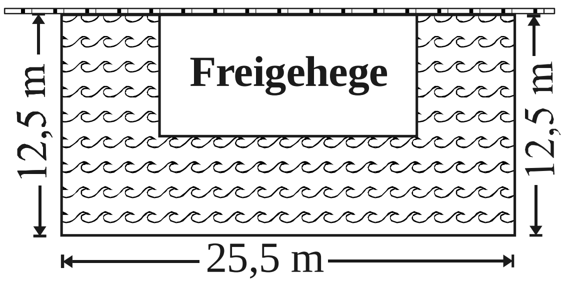
4. a) (1) Konstruiere das Dreieck ABC aus c = 6 cm, b = 4 cm und $\alpha = 90°$.
   (2) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
   b) (1) Konstruiere das Dreieck ABC aus c = 9 cm, $\alpha = 50°$ und $\beta = 64°$.
   (2) Berechne die Größe von γ.
   c) (1) Konstruiere das Dreieck ABC aus a = 6 cm, b = 4,4 cm und $\gamma = 40°$.
   (2) Spiegele den Punkt A an $\overline{BC}$, nenne den Bildpunkt A' und ergänze zum Viereck ABA'C. Wie heißt das entstandene Viereck?

---

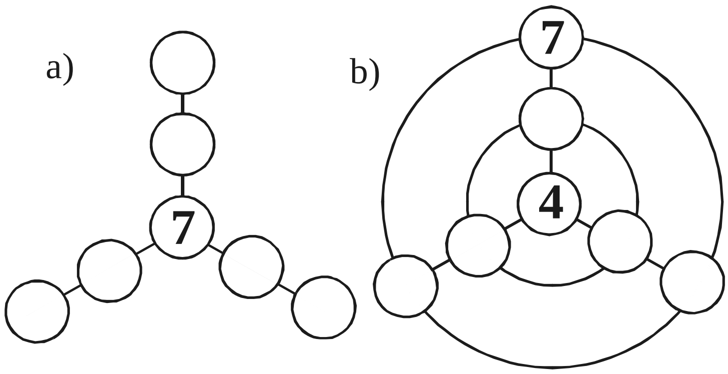
5. Die Wetterseite eines Hauses soll verklinkert werden.
   a) (1) Zerlege die Figur in Teilflächen und berechne deren Flächeninhalte.
      (2) Wie groß ist die gesamte Fläche?
   b) Pro Quadratmeter kostet die Verklinkerung 120 €. Wie hoch sind die Kosten?
   c) Bei Barzahlung gewährt der Betrieb 3 % Preisermäßigung. Wie hoch sind dann die Kosten?



6. Im Zoo wird das Freigehege der Eisbären durch einen 2,80 m tiefen und 5,50 m breiten Graben begrenzt.
   a) Berechne den Flächeninhalt des Freigeheges.
   b) Um den äußeren Rand des Grabens wird zur Sicherheit ein Zaun gezogen. Wie lang ist er?
   c) Berechne, wie viel Wasser man benötigt, um den Graben bis zum Rand zu füllen.
   d) Der Graben ist mit 575 m^3 Wasser gefüllt. Für Wartungsarbeiten soll der Graben vollständig entleert werden. Die Pumpe fördert 23 m^3 pro Stunde. Wie lange dauert es, bis das gesamte Wasser abgepumpt ist?



7. Für alle Aufgaben gilt: Jede Zahl darf nur einmal in der jeweiligen Figur verwendet werden.
   a) Setze die Zahlen 1 bis 7 so ein, dass die Summe auf den drei Ästen jeweils 14 beträgt.
   b) Setze die Zahlen 1 bis 7 so ein, dass die Summe auf jedem Ast und auf jedem Kreis 12 ergibt.



   c) Setze die Zahlen 1 bis 9 so ein, dass sich für jedes Teilquadrat die gleiche Summe ergibt.
   d) Setze die Zahlen 1 bis 9 so ein, dass die Summe der Zahlen auf jeder Dreieckseite 20 ergibt.