MATHEMATIK-WETTBEWERB 2003/2004 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE A

Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an; $G = \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

   a) $(x + 10)(x^2 - 25)(x^3 - 1) = 0$

   b) $x^2 - 225 = x + 15$

   c) $(x + 8)(x - 8) \geq 2(x - 8)^2$

   d) $(x^2 - 9)^2 - 49 \geq 0$

---

2. Für eine Zahl x gibt |x| den Abstand an, den diese Zahl vom Nullpunkt der Zahlengeraden hat. Zum Beispiel: $|-4| = 4$ $|-4{,}4| = 4{,}4$ $|3 + 4| = 7$

   Gib die jeweiligen Lösungsmengen in aufzählenden Form an; $G = \mathbb{Z}$.

   a) $|x + 10| = 15$

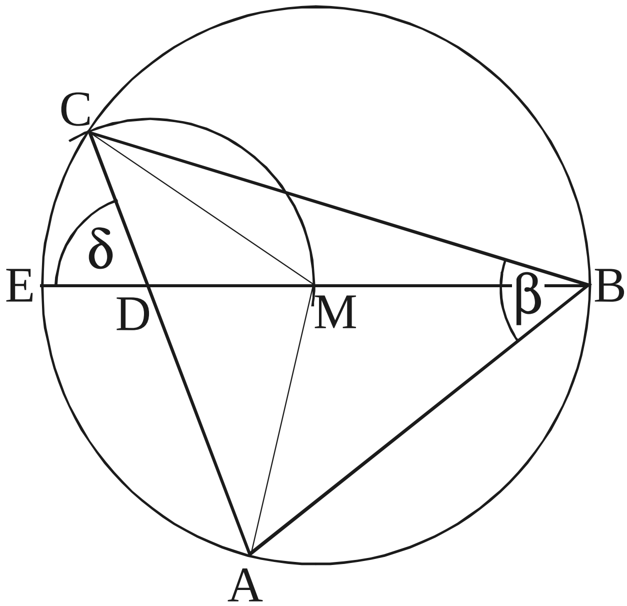
   b) $|x + 10| \leq |x - 10|$

   c) $|x| \cdot |x| \geq |x| + |x|$

   d) $|x^2 - 10| \geq 10 - x^2$

---

3. Das Dreieck ABC wurde folgendermaßen konstruiert:
   - Der Punkt D – beliebig gewählt – liegt zwischen den Punkten M und E auf dem Durchmesser $\overline{EB}$ des Kreises.
   - C ist der Schnittpunkt des Kreisbogens um D mit r = |DM| und dem Kreis.
   - A ist der Schnittpunkt der Geraden durch D und C mit dem Kreis.



   a) Es gilt: δ = 64°. Bestimme die Größe des Winkels β.

   b) In einem entsprechend konstruierten Dreieck ist $\measuredangle DCB = 30°$. Bestimme die Größe des Winkels δ.

   c) Ein entsprechend konstruiertes Dreieck ABC ist gleichschenklig mit |AB| = |AC|. Zeige, dass dann auch das Dreieck DAB gleichschenklig ist.

---

4. **Hinweis: Zeichne jeweils <u>einen</u> Kreis in ein Koordinatensystem (1 LE = 1 cm) ein.**

   a) Konstruiere einen Kreis, der durch den Punkt A(0|3) verläuft und die beiden Koordinatenachsen berührt.

   b) Konstruiere einen Kreis mit dem Radius r = 3 cm, der durch den Punkt A(1|5) verläuft und die y-Achse berührt.

   c) Konstruiere einen Kreis mit r > 2 cm, der durch den Punkt A(2|2) verläuft und die beiden Koordinatenachsen berührt.

---

5. Herr Schlau ist am 2.5.67 geboren, seine Frau am 3.4.67. Beide eröffnen ein Online-Konto, wozu sie einen Geheimcode benötigen. Sie wollen diesen mit den Ziffern **2, 3, 4, 5, 6, 7** bilden.

   a) Herr Schlau möchte eine **6-stellige** Geheimzahl bilden.
      (1) Wie viele Zahlen sind möglich, wenn die Ziffern auch mehrmals benutzt werden können?
      (2) Wie viele Zahlen sind möglich, wenn jede Ziffer nur einmal benutzt werden darf?

   b) Frau Schlau möchte eine **5-stellige** Geheimzahl bilden.
      (1) Wie viele Zahlen sind möglich, wenn keine Ziffer mehrmals vorkommt?
      (2) Wie viele Zahlen sind möglich, wenn keine Ziffer mehrmals vorkommt und die Zahl durch 6 teilbar sein soll?

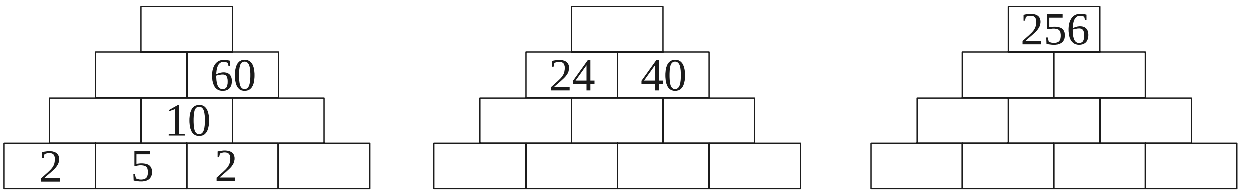
   c) Zur Bildung eines Geheimcodes können auch Buchstaben verwendet werden. Da im Jahre 2001 ihre Tochter Helene geboren wurde, verwenden sie jeden der sechs Buchstaben H, E, L, E, N, E und jede der vier Ziffern 2, 0, 0, 1 zur Bildung eines zehnstelligen Geheimcodes genau einmal.
      (1) Wie viele Codes können gebildet werden?
      (2) Wie viele Codes können gebildet werden, wenn das Wort HELENE als Ganzes im Code enthalten sein soll?

   Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden!

---

6. In den unten abgebildeten Zahlenmauern steht im Kästchen über zwei Zahlen jeweils deren Produkt. Dabei dürfen nur die natürlichen Zahlen $n \geq 2$ verwendet werden.

   a) Ergänze die folgenden Zahlenmauern nach den oben angegebenen Regeln!



   b) Nenne die vier kleinsten Zahlen, die im obersten Kästchen einer entsprechenden Zahlenmauer stehen können!

   c) Zeige, dass im obersten Kästchen einer entsprechenden Zahlenmauer 10000, nicht aber 2000 stehen kann!

---

7. Reist man mit einem Flugzeug (Durchschnittsgeschwindigkeit 600 km/h) von A nach B, so entspricht die Reisestrecke der Luftlinien-Entfernung zwischen A und B. Für eine Autofahrt (Durchschnittsgeschwindigkeit 100 km/h) von A nach B ist die Reisestrecke um 30% länger als die Luftlinie. Bedingt durch Wartezeiten erhöht sich die Reisedauer beim Fliegen um 2 Stunden.

   a) Frankfurt/Main und Erfurt liegen Luftlinie 200 km voneinander entfernt. Wie lang ist die Autostrecke?

   b) Ein Pkw fährt 780 km von Hamburg nach München. Wie viele Stunden dauert diese Fahrt? Wie lange dauert die Reise mit dem Flugzeug von Hamburg nach München?

   c) Ab welcher Entfernung (Luftlinie) zwischen zwei Orten ist die Reisezeit mit dem Flugzeug kürzer? (Runde auf km!)

   d) Von K-Stadt nach Aufhof beträgt die Luftlinie-Entfernung 500 km mehr als von Aufhof nach Wuhlort. Herr Tie startet in K-Stadt und zur gleichen Zeit startet Frau Qualle in Wuhlort. Er reist mit dem Flugzeug, sie mit dem Auto. Beide kommen gleichzeitig in Aufhof an. Wie lange waren sie unterwegs?

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2003/2004 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE B

Hinweis:	**Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.**

1. Gib die Lösungsmenge in aufzählender Form an. $G = \mathbb{Z} = \{... -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

   a) $3 \cdot (4x + 3) - 5 = 8 + 4x - 20$

   b) $(5x - 3) \cdot 3 < -(4x - 7)$

   c) $(4x + 3)^2 = 4x\,(4x + 7)$

   d) $(4x + 3)(4x - 3) - 16x = -4(4x - 7) - 21$

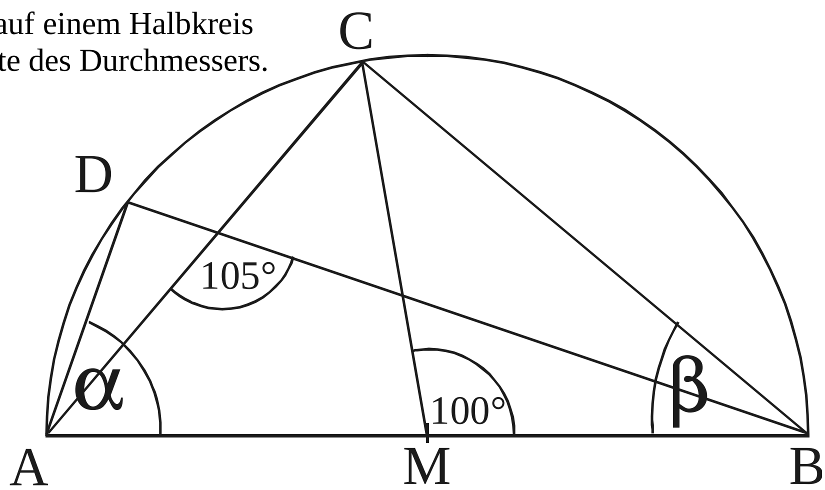
---

2. Beim Radrennen „Rund um den Messeturm" wird ein Rundkurs von 21 km Länge 6 mal durchfahren. Eric siegte in einer Gesamtzeit von 3 Stunden 30 Minuten, Jan wurde Zweiter und erreichte eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 35 km/h. Rudi wurde Letzter und kam 42 Minuten nach dem Sieger ins Ziel.
   a) Wie lange brauchte Eric durchschnittlich für eine Runde?
   b) Gib die Gesamtzeit von Jan in Minuten an.
   c) Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit von Rudi.
   d) Als Jan seine letzte Runde begann, war er genau 3 Stunden gefahren. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit hätte er in der letzten Runde fahren müssen, um Eric noch zu überholen?

---

3. a) (1) Konstruiere das Dreieck ABC mit $|AC| = b = 5$ cm, $\gamma = 62°$, $|AB| = c = 6$ cm
   (2) Zeichne die Höhe h_b mit dem Fußpunkt D und die Höhe h_a mit dem Fußpunkt E ein. Die Höhen schneiden sich im Punkt F.
   (3) Berechne die Größe der Winkel
   $\measuredangle EBD$
   $\measuredangle EFD$
   $\measuredangle DFA$
   (4) Wie groß muss der Winkel γ in einem Dreieck ABC gewählt werden, damit der Höhenschnittpunkt in C liegt?

   b) Die Punkte A, B, C und D liegen auf einem Halbkreis um M, A und B sind die Endpunkte des Durchmessers.
   Berechne die Größe der Winkel
   $\alpha = \measuredangle BAD$ und
   $\beta = \measuredangle CBA$.



---

4. a) Herr Weber leiht sich bei der Bank 8400 € für 5 Monate. Der Zinssatz beträgt 6,5%. Wie viel muss er einschließlich der Zinsen zurückzahlen?
   b) Frau Bäcker hat 12600 € für 11 Monate ausgeliehen. Sie zahlt mit den Zinsen 13524 € zurück. Wie hoch war der Zinssatz?
   c) Die Q-Bank bietet folgendes Sparmodell an: Wird ein Geldbetrag von mindestens 5000 € eingezahlt, so erhält man 5 % Zinsen pro Jahr, die jährlich dem Kapital zugeschlagen werden. Nach zwei Jahren wird der Gesamtbetrag ausgezahlt.
   (1) Frau Schneider zahlt 8000 € ein. Wie viel bekommt sie nach zwei Jahren ausgezahlt?
   (2) Herr Wagner erhält nach zwei Jahren 7056 € ausgezahlt. Welchen Betrag hatte er eingezahlt?

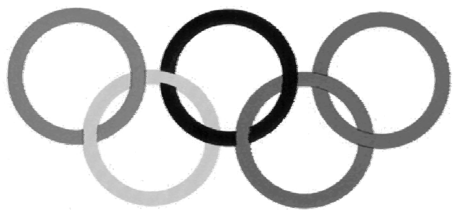
---

5. **Zur Lösung der folgenden Aufgaben ist zunächst eine Gleichung aufzustellen.**

   a) Wenn man den dritten Teil einer ganzen Zahl x um 5 vergrößert und diese Summe mit 4 multipliziert, so erhält man eine negative Zahl. Welche Zahlen kommen für x in Frage?
   b) Die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ist 3,5 cm kürzer als jeder Schenkel. Der Umfang des Dreiecks beträgt 43 cm. Wie lang sind die Dreieckseiten?
   c) Bei einem Quader ist die Länge doppelt so groß wie die Breite, die Höhe ist ein Viertel der Länge. Die Summe aller Kantenlängen beträgt 168 cm. Berechne Länge, Breite und Höhe des Quaders.

---

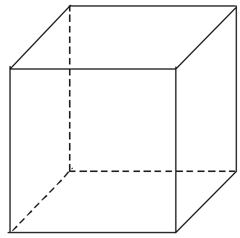
6. Fünf verschieden farbige Ringe sind das Symbol der Olympischen Spiele.
   a) Zeichne die Olympischen Ringe als Kreise so in ein Koordinatensystem (Einheit: 1 cm), dass folgende drei Bedingungen erfüllt sind:
      - A(–5|3) und B(0|3) sind die Mittelpunkte der beiden unteren Ringe.
      - Der Radius aller Ringe ist gleich groß, r = 2 cm.
      - Die Gerade AB ist Tangente an die Ringe um C, D und E.



   b) Gib die Koordinaten der Punkte C, D und E an.
   c) Die Punkte A, B, C und E sind Eckpunkte eines symmetrischen Trapezes.
   (1) Bestimme den Flächeninhalt des Trapezes ABCE.
   (2) In einer entsprechenden Figur beträgt der Flächeninhalt des Trapezes ABCE 60 cm^2. Welchen Radius haben dann die Ringe?
   d) Wie viele Möglichkeiten hat man, fünf verschiedenfarbige Ringe zu dem Symbol der Olympischen Spiele anzuordnen?

---

7. a) (1) Bestimme die Kantenlänge des Würfels mit dem Volumen 8 cm^3.
   (2) Berechne seine Oberfläche.
   b) (1) Ein Quader wird in <u>zwei</u> Würfel zu je 8 cm^3 Volumen zerlegt. Wie groß war die Oberfläche des Ausgangsquaders?
   (2) Aus einem anderen Quader kann man <u>drei</u> dieser Würfel (V = 8 cm^3) herstellen. Wie groß war dessen Oberfläche?



   c) Wird ein Quader in vier derartige Würfel zerlegt, so kann der Ausgangsquader zwei verschiedene Formen aufweisen.
   (1) Gib die Kantenlängen beider Quader an.
   (2) Um wie viel cm^2 unterscheiden sich ihre Oberflächen?
   d) Die Oberflächen zweier Quader, aus denen gleich viele derartige Würfel hergestellt werden können, unterscheiden sich um 16 cm^2. In wie viele Würfel (V = 8 cm^3) ließe sich jeder der beiden Ausgangsquader zerlegen?

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2003/2004 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE C

Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

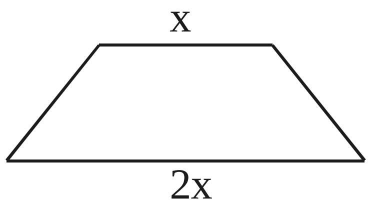
1. a) Gib jeweils die Lösungsmenge an. $G = \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

   (1) $6x + 15 - 8x = 14 + 7x - 17$

   (2) $6 \cdot (4x - 3) + 8 \cdot (2 - 3x) = 4 \cdot (4x + 3) - 3 \cdot (5x + 2)$

   b) Eine Zahl, ihre Hälfte, ihr Doppeltes und ihr Dreifaches ergeben addiert 130. Wie heißt diese Zahl?

   c) Aus einem 70 cm langen Draht soll ein gleichschenkliges Trapez hergestellt werden. Die beiden Schenkel sollen jeweils 5 cm länger sein als die Seite x. Wie lang sind die vier Seiten des Trapezes?



GÜNSTIG: MOTORROLLER „ELVIS“ NUR 2000 €
BEI BARZAHLUNG : 3 % RABATT
BEI RATENZAHLUNG : 25 % ANZAHLUNG UND DIE
RESTSUMME IN 12 MONATSRATEN ZU JE 145 €

2. a) (1) Wie viel Euro kostet der Motorroller bei Barzahlung?
   (2) Wie teuer ist der Motorroller bei Ratenzahlung?
   (3) Um wie viel Prozent erhöht sich der ursprüngliche Preis von 2000 € bei Ratenzahlung?

   b) Werner muss sich noch 1200 € leihen, um den Roller bezahlen zu können. Er zahlt das Geld nach 10 Monaten mit 4,5 % Zinsen zurück. Wie teuer ist der Roller für ihn?

---

3. a) Für den Druck von 5000 Exemplaren eines Buches werden 2200 kg Papier verbraucht. Ergänze die Tabelle!

Anzahl Bücher	1000	3500	5000		
Papier [kg]			2200	2640	3300

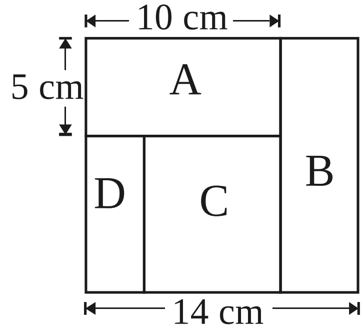
   b) Die 30 Schüler und Schülerinnen der Klasse 8a wollen eine Mathematik-Formelsammlung kaufen. Der Einzelpreis beträgt 6,90 €. Der Verlag ermäßigt den Gesamtpreis um den Kaufpreis von zwei Exemplaren. Wie viel Euro kostet die Formelsammlung für jeden?

   c) Jan hat seinen Praktikumsbericht mit dem Computer geschrieben. Es sind 16 Seiten mit 45 Zeilen pro Blatt.
   (1) Er verkleinert den Zeilenabstand. Wie viele Seiten hat der Bericht bei 60 Zeilen pro Blatt?
   (2) Wie viele Zeilen entstehen pro Blatt, wenn der Bericht 18 Seiten lang ist?

4. Beim Einbau von Solaranlagen wird empfohlen, dass die Größe des Solardaches $\frac{1}{5}$ der Größe der Wohnfläche betragen soll.
   a) (1) Familie Meier bewohnt ein Haus mit 120 m^2 Wohnfläche. Wie groß sollte die Fläche der Solaranlage sein?
   (2) Wie viel Liter Wasser können damit erwärmt werden, wenn 3 m^2 Solardach für 50 Liter nötig sind?
   (3) Ohne Solaranlage verbrauchte Familie Meier durchschnittlich 2500 l Heizöl. Nach Einbau einer Solaranlage sparten sie $\frac{3}{10}$ des bisherigen Verbrauchs ein. Wie hoch sind die Heizkosten nach Einbau der Solaranlage, wenn ein Liter Heizöl 42 Cent kostet?
   b) Die Anschaffung der Solaranlage kostet 8000 €. Davon entfallen 30 % auf die Montage, 65 % auf die Anlage und der Rest auf Zubehör.
   (1) Wie hoch sind die einzelnen Kosten?
   (2) Stelle die Kostenverteilung in einem Kreisdiagramm dar!

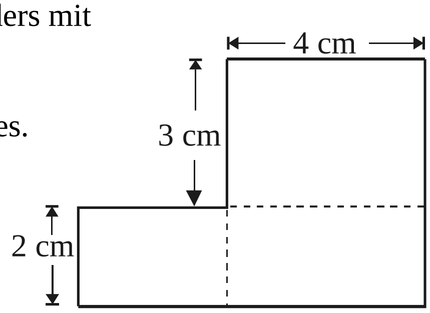
---

5. a) Meike und Anna zeichnen <u>jeweils</u> ein Rechteck, das sich in genau 60 Quadrate von 1 cm Seitenlänge zerlegen lässt. Annas Rechteck hat einen doppelt so großen Umfang wie Meikes Rechteck. Ermittle die Seitenlänge der Rechtecke.
   b) In nebenstehender Figur sind die Flächeninhalte der Rechtecke A, B und C gleich groß. Wie groß ist der Flächeninhalt von Rechteck D?



---

6. a) (1) Konstruiere ein Parallelogramm ABCD mit $|AB| = a = 3$ cm, $\alpha = 45°$ und $|BC| = b = 2$ cm.
   (2) Ergänze das Parallelogramm zu einem Schrägbild eines Quaders mit 4 cm Körperhöhe.
   (3) Wie breit ist dieser 3 cm lange und 4 cm hohe Quader?
   b) (1) Die Zeichnung besteht aus drei Teilflächen eines Quadernetzes. Übertrage die Zeichnung mit den angegebenen Maßen und vervollständige das Netz.
   (2) Berechne die Oberfläche und das Volumen dieses Quaders.



---

7. a) Aus den Ziffern **2, 8, 9, 0** sollen vierstellige Zahlen gebildet werden, wobei jede Ziffer einmal verwendet wird. Die Ziffer **0** darf nicht als erste Ziffer stehen.
   (1) Welche dieser Zahlen sind ungerade? Schreibe sie auf!
   (2) Nenne die größte und die kleinste Zahl, die so mit diesen vier Ziffern bilden kann.
   b) Welche zweistelligen Primzahlen kann man aus den Ziffern **2, 8, 9, 0** bilden?
   c) (1) Welche Teiler hat die Quersumme der Zahl 2809?
   (2) Von welcher Zahl ist 2809 die Quadratzahl?
   d) Nenne die dreistellige Quadratzahl, die aus du aus den Ziffern **2, 8, 9, 0** bilden kannst.
