

Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden diejenigen mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

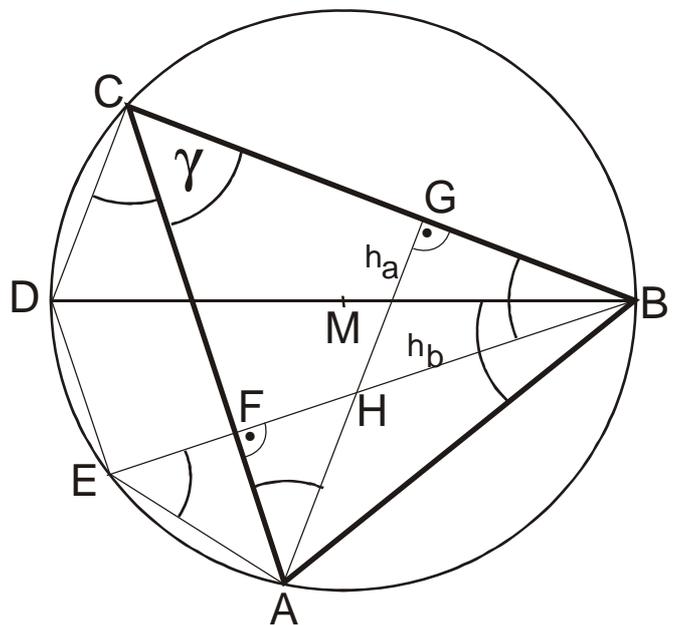
AUFGABEN DER GRUPPE A

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an. $G = \mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

- a) $x^2 \cdot (1 - x^2) > -(x^2 + 7) \cdot (x^2 - 7)$
- b) $(x^4 - 16) \cdot (x + 3) \cdot (x^2 + 25) = 0$
- c) $(x^3 - 4)^2 - 16 > 0$
- d) $(x^2 - 256) = (x - 16) \cdot (x + 16)^3$

2. In dem spitzwinkligen Dreieck ABC wird die Höhe h_b so verlängert, dass sie den Umkreis im Punkt E schneidet. Die Höhen h_a und h_b schneiden sich im Punkt H. \overline{DB} ist Durchmesser des Umkreises.

- a) Wie groß ist der Winkel $\angle DCB$?
- b) Zeige:
 - (1) $\triangle DCA = \triangle HAC$.
 - (2) $\angle AEF = \gamma$.
- c) Zeige, dass das Viereck ACDE ein symmetrisches Trapez ist.
- d) Zeige: $\triangle CBE = \triangle DBA$.



3. Stelle zunächst jeweils eine entsprechende Gleichung auf.

- a) Vergrößert man die Kantenlänge eines Würfels um 3 cm, so nimmt die Oberfläche um 234 cm^2 zu. Berechne die ursprüngliche Kantenlänge des Würfels.
- b) Bei einem Quader werden Grundfläche und Höhe so verändert, dass ein Quader mit fünffachem Volumen entsteht. Dazu verlängert man die Höhe um 25 %. Wie müssen dann die Grundkanten geändert werden? Gib zwei Möglichkeiten an!
- c) Gegeben ist ein gleichschenkliges Trapez ABCD mit $AB \parallel CD$ und $|AB| = g$. Verlängert man die Grundseite \overline{AB} um das Vierfache, so erhält man ein Trapez $AB'CD$ mit doppeltem Flächeninhalt. Das Wievielfache von g ist $|CD|$?

- 4. a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $\alpha = \angle BAC = 70^\circ$, $\beta = \angle CBA = 50^\circ$ und dem Inkreisradius $r_1 = 3 \text{ cm}$.
- b) Konstruiere ein Trapez ABCD mit dem Inkreisradius $r_1 = 3 \text{ cm}$, $AB \parallel CD$, $\alpha = \angle BAD = 80^\circ$ und $|AC| = 10 \text{ cm}$.
- c) Konstruiere ein Drachenviereck ABCD, das einen Umkreis und einen Inkreis besitzt; die Symmetrieachse des Drachenvierecks ist AC. Es gilt: $\angle BAD = 70^\circ$, Inkreisradius $r_1 = 3 \text{ cm}$.

5. a) (1) Zeige: $(1 + n + n^2 + n^3 + n^4) \cdot (n - 1) = n^5 - 1$
 (2) Berechne: $(n^8 - 1) : (n - 1)$
 b) (1) Zeige, dass $5^{20} - 1$ durch 8 teilbar ist.
 (2) Für welche n ist $5^n - 1$ durch 8 teilbar?
 (3) Wie ist n zu wählen, damit $5^n - 1$ durch 32 teilbar ist? Gib zwei verschiedene Möglichkeiten an.
 c) Bestimme $m < 10$ und $n > 10$ so, dass $m^n - 1$ durch 10 teilbar ist. Gib zwei verschiedene Möglichkeiten an.

6. In der nebenstehenden Anordnung sind die ersten drei Dreieckszahlen $D_1 = 1$, $D_2 = 3$ und $D_3 = 6$ dargestellt.

a) Gib D_4 bis D_7 an.

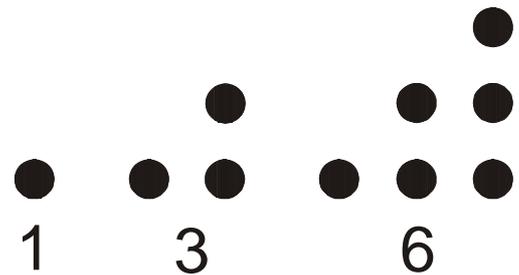
b) Begründe: Jede Dreieckszahl D_n lässt sich durch den

Term $\frac{1}{2}n(n+1)$ berechnen.

c) Zeige, dass die Summe zweier aufeinander folgender Dreieckszahlen stets eine Quadratzahl ist.

d) Zeige, dass von drei aufeinander folgenden Dreieckszahlen stets zwei durch 3 teilbar sind.

e) Zeige, dass die Differenz der Quadrate zweier aufeinander folgender Dreieckszahlen immer eine Kubikzahl ist.



7. Zwei Verlage bieten Mädchenzeitschriften an. 40 % der Schülerinnen, die zum ersten Mal eine Mädchenzeitschrift kaufen, entscheiden sich für *Trendy Girl*, 60 % für *Active Fun*.
- a) Fünf Schülerinnen kaufen unabhängig voneinander jeweils eine der beiden Zeitschriften. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
- (1) Alle kaufen die Zeitschrift *Trendy Girl*.
 - (2) Eine Schülerin entscheidet sich für *Trendy Girl*, vier nehmen *Active Fun*.
 - (3) Höchstens eine Schülerin kauft *Active Fun*.
 - (4) Mindestens eine Schülerin kauft *Trendy Girl*.
- b) Eine Umfrage ergibt, dass 80 % der Käuferinnen von *Trendy Girl* sich beim nächsten Kauf wieder für *Trendy Girl* entscheiden, während 70 % der Käuferinnen von *Active Fun* sich beim nächsten Kauf für *Trendy Girl* entscheiden. Wie viel Prozent der Schülerinnen entscheiden sich beim zweiten Kauf für die Zeitschrift *Trendy Girl*?
- c) Nach einer Werbekampagne hat sich der Anteil der Schülerinnen, die sich beim zweiten Kauf jeweils für die andere Zeitschrift entscheiden, verändert. Nun beträgt der Anteil derer, die sich beim zweiten Kauf für *Trendy Girl* entscheiden, nur noch 36 %. Wie viel Prozent der Käuferinnen von *Active Fun* bzw. *Trendy Girl* kaufen das zweite Mal eine andere Zeitschrift? Gib zwei verschiedene Möglichkeiten an.

Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden!

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2005/2006 DES LANDES HESSEN

Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden diejenigen mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

AUFGABEN DER GRUPPE B

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an. $G = \mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$
 - a) $5(x + 3) + 7 = 3x - (4x - 10)$
 - b) $(3x - 2)(2x + 4) = 6x^2 + 3x - 7$
 - c) $(2x + 0,3)^2 \leq (2x - 0,4)^2 - 5,67$
 - d) $(4x - 5)(4x + 5) = 4 - (-15x^2 - 20)$

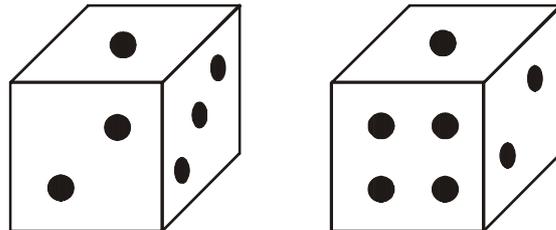
2.
 - a) (1) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) das Quadrat ABCD mit $A(-1|1)$, $B(3|1)$, $C(3|5)$ und $D(-1|5)$.
(2) Zeichne die Gerade MP, wobei M Mittelpunkt von \overline{AB} und P Mittelpunkt von \overline{BC} ist.
 - b) Wie groß ist der Flächeninhalt des Fünfecks AMPCD?
 - c) Wie viel Prozent der Quadratfläche nimmt das Dreieck MBP ein?
 - d) Q ist ein Punkt auf \overline{BC} . Bestimme die Länge von \overline{BQ} , wenn das Dreieck MBQ $\frac{1}{5}$ der Quadratfläche einnimmt.
 - e) Drehe das Viereck ABCD so um den Punkt P um 90° , dass C' die Koordinaten $(1|3)$ hat und nenne die Koordinaten der Bildpunkte A' , B' und D' .
 - f) (1) Wie groß ist der Flächeninhalt des Drachenvierecks $AA'CD'$?
(2) Welcher Anteil der Drachenfläche $AA'CD'$ gehört zum Quadrat ABCD?

3.
 - a) (1) Weltweit betrug im Jahr 2005 die Anbaufläche von Genprodukten 90 Millionen Hektar (90 Mio. ha). Davon wurden 54 Mio. ha für den Anbau von gentechnisch veränderter Soja genutzt. Wie viel Prozent sind das?
(2) Außer Soja wurden gentechnisch veränderte Baumwolle (10 Mio. ha), Raps (5 Mio. ha) und Mais (21 Mio. ha) angebaut. Stelle die Anteile dieser vier Genprodukte in einem Kreisdiagramm ($r = 3$ cm) dar. Notiere zunächst die Winkelmaße.
 - b) In Brasilien stieg die Anbaufläche von Gensoja im Jahr 2005 gegenüber dem Vorjahr um 88 % auf 9,4 Mio. ha. Wie viel Mio. ha wurden 2004 angebaut?
 - c) In den letzten 10 Jahren ist die Anbaufläche von Genprodukten weltweit auf das Fünfzigfache gestiegen; sie beträgt nun 90 Mio. ha.
 - (1) Wie viel Prozent sind das?
 - (2) Wie groß war die Anbaufläche vor 10 Jahren?
 - (3) „Dann hat sich die Anbaufläche in jedem Jahr durchschnittlich verfünffacht!“, behauptet Sören. Was meinst du dazu? Begründe!

4.
 - a) Konstruiere ein achsensymmetrisches Trapez ABCD ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$) mit $|AB| = 4$ cm, $\alpha = 100^\circ$ und $|BD| = 6,5$ cm.
 - b) Konstruiere ein Parallelogramm ABCD mit $|AB| = a = 5$ cm; $|AC| = e = 8$ cm; $|BD| = f = 5$ cm.
 - c) Konstruiere ein symmetrisches Drachenviereck ABCD (AC ist Symmetrieachse) mit $|BD| = 5$ cm, $|BC| = 3,5$ cm, und $\alpha = \angle BAD = 40^\circ$.

5. Zur Lösung der folgenden Aufgaben ist zunächst jeweils eine Gleichung aufzustellen!
- (1) In einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Umfang $u = 45$ cm ist jeder Schenkel doppelt so lang wie die Basis. Wie lang sind jeweils Basis und Schenkel des Dreiecks?
 - (2) In einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Umfang $u = 45$ cm ist jeder Schenkel 3 cm länger als die Basis. Wie lang sind jeweils Basis und Schenkel des Dreiecks?
- b) Bei einem Rechteck ist die Seite a doppelt so lang wie die Seite b . Verlängert man a um 7 cm und verkürzt b um 3 cm, so wird der Flächeninhalt 45 cm² größer. Wie lang ist a , wie lang ist b ?
- c) Verlängert man die Kanten eines Würfels um je 2 cm, so vergrößert sich die Würfeloberfläche um 240 cm². Bestimme die Kantenlänge des ursprünglichen Würfels.

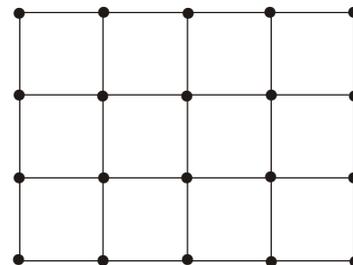
6. a) Zwei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
- Beide Würfel zeigen 6.
 - Die Summe der Augenzahlen beider Würfel ist 3.
 - Beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl.
 - Mindestens einer der beiden Würfel zeigt eine 6.
 - Das Produkt der beiden Augenzahlen ist 6.



- b) In einem Beutel befinden sich zehn 1-EURO-Münzen aus verschiedenen Ländern: 5 Münzen aus Deutschland, 2 aus Italien und 3 aus Österreich. Es werden zwei Münzen herausgenommen und auf den Tisch gelegt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
- Beide Münzen sind aus Deutschland.
 - Die beiden Münzen kommen aus verschiedenen Ländern.

Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden!

7. Die Seitenlängen des abgebildeten Rechtecks sind $a = 4$ cm und $b = 3$ cm. Im Inneren befinden sich 6 Gitterpunkte, auf dem Rand sind 14 Gitterpunkte.



- a) Ergänze die Tabelle für entsprechende Rechtecke:

a [cm]	4	4	6	1	10	
b [cm]	3	5				
Anzahl der Gitterpunkte im Inneren	6		25			8
Anzahl der Gitterpunkt auf dem Rand	14			6	50	22

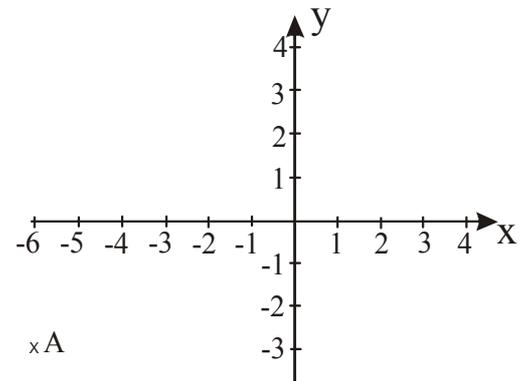
- b) Notiere jeweils einen Term, mit dem man die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren und die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand berechnen kann, wenn man a und b kennt.
- c) (1) Wie viele Gitterpunkte im Inneren kann ein Rechteck mit 56 Randgitterpunkten höchstens haben?
- (2) Es gibt Rechtecke, bei denen die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren gleich der Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand ist. Gib eine Möglichkeit für die Seitenlängen a und b an.

Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden diejenigen mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

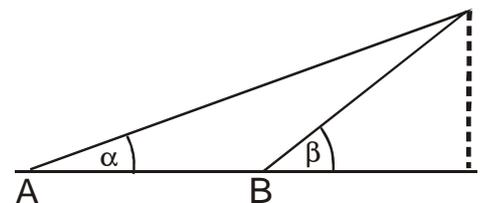
AUFGABEN DER GRUPPE C

1. a) Berechne x .
 - (1) $3x - 8 + 4x - 11 = 11x - 5 - 7x + 7$
 - (2) $5x + 7 - (2x + 3) = -23$
 - (3) $5 \cdot (2x + 1) = 10 - 3 \cdot (4 - 3x)$
- b) Das Siebenfache einer Zahl, vermindert um 3, ergibt dasselbe wie das Dreifache derselben Zahl, vermehrt um 5. Schreibe eine Gleichung auf und löse sie.
- c) Schreibe zu der Gleichung $3x + 4 = 11$ ein passendes Zahlenrätsel auf.

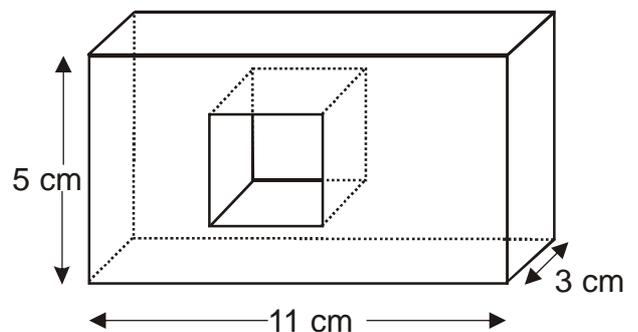
2. a) (1) Zeichne das Fünfeck ABCDE in ein Koordinatensystem (Einheit 1cm): $A(-6 | -3)$, $B(0 | -3)$, $C(4 | 0)$, $D(2 | 3)$, $E(-6 | 0)$.
 (2) Berechne den Flächeninhalt des Fünfecks ABCDE.
- b) Der Flächeninhalt eines Dreiecks beträgt 48 cm^2 . Gib jeweils 2 Möglichkeiten für die Länge der Grundseite und der Höhe an.
- c) Ein Trapez ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$) hat folgende Maße: $|AB| = a = 5 \text{ cm}$, $|CD| = c = 3 \text{ cm}$, $h = 3,5 \text{ cm}$. Wie lang muss die Grundseite eines Parallelogramms sein, das den gleichen Flächeninhalt und die gleiche Höhe wie das Trapez hat?



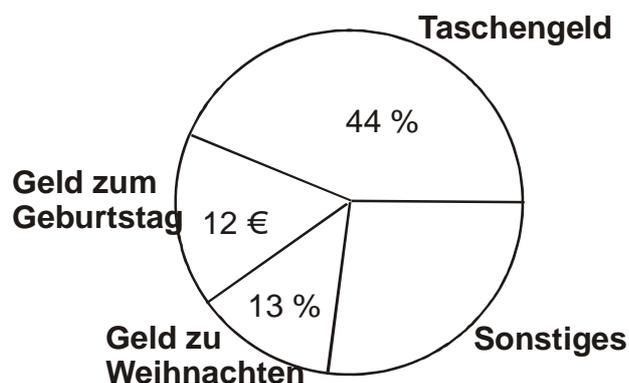
3. a) (1) Zeichne das Dreieck ABC mit $a = 4 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$ und $\beta = 90^\circ$.
 (2) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
- b) Von einem Punkt A aus wird die Spitze eines Turms unter dem Winkel $\alpha = 25^\circ$ angepeilt. Nähert man sich dem Turm um 300 m, so kann man von B aus die Spitze unter dem Winkel $\beta = 45^\circ$ anpeilen (siehe nebenstehende Skizze).
 (1) Zeichne das Dreieck in einem geeigneten Maßstab und gib die Höhe des Turms an.
 (2) Gib den gewählten Maßstab an.
- c) Tom behauptet: „Ich habe ein gleichschenkliges Dreieck mit 3 verschieden großen Winkeln gezeichnet!“ Was meinst du dazu? Begründe deine Antwort.



4. Aus einem Quader aus Eichenholz wurde ein Würfel herausgeschnitten (siehe Skizze).
 a) Berechne das Volumen des ursprünglichen Quaders.
 b) Berechne das Volumen des Würfels.
 c) Um wie viel Prozent hat sich das Quadervolumen verändert? Runde das Ergebnis auf Zehntel.
 d) Berechne die Oberfläche des ursprünglichen Quaders.
 e) Berechne die Oberfläche des abgebildeten Restkörpers?
 f) Wie viel wiegt der Restkörper, wenn 1 cm^3 Eichenholz 0,9 Gramm schwer ist?



5. a) Im Jahrgang 10 einer Schule hat jeder der 200 Jugendlichen im Durchschnitt 75 € monatlich zur Verfügung (das sind Taschengeld, Geld zu Weihnachten, Geld zum Geburtstag und Sonstiges, wie zum Beispiel Geld für Ferienjobs). Die Anteile sind im Kreisdiagramm dargestellt.



- (1) Wie hoch ist der prozentuale Anteil des Geburtstagsgeldes?
 (2) Wie viel Prozent entfallen auf Sonstiges?
 (3) Wie viel Euro Taschengeld erhält jeder im Durchschnitt?
- b) Paul bekommt jetzt monatlich 50 € Taschengeld. In den nächsten Monaten soll es erhöht werden.
 (1) Seine Eltern bieten ihm 2 Möglichkeiten an:
 ○ Drei Monate jeden Monat 5 Euro mehr als im Vormonat oder
 ○ drei Monate jeden Monat 10 % mehr als im Vormonat.
 Für welche Möglichkeit sollte sich Paul entscheiden? Begründe!
 (2) Paul hätte jedoch gerne schon im nächsten Monat 65 € Taschengeld. Um wie viel Prozent müsste sein Taschengeld erhöht werden?
- c) Pauls jüngere Schwester Eva sagt: „Ich möchte in Zukunft auch 50 € Taschengeld haben!“ Dazu müsste ihr Taschengeld um 25 % erhöht werden. Wie viel Taschengeld erhält sie bisher?

6. Alina hat einen Handy-Vertrag abgeschlossen. Sie muss eine monatliche Grundgebühr von 4,95 Euro zahlen. Eine Gesprächsminute kostet in der Hauptzeit 59 Cent und in der restlichen Zeit 29 Cent.

a) Wie hoch war ihre Rechnung im Februar, wenn sie insgesamt 105 Minuten nur in der preisgünstigen Zeit telefoniert hat?

b) Im März hat Alina insgesamt $1\frac{1}{2}$ Stunden telefoniert, davon eine Viertelstunde zur Hauptzeit.

Wie hoch war ihre Rechnung in diesem Monat?

c) Im April ist Alinas Rechnung besonders hoch. Sie muss 58,85 Euro bezahlen. Alina ist sicher, dass sie zur Hauptzeit 25 Minuten telefoniert hat. Wie viele Minuten hat sie insgesamt telefoniert?

7. a) In der folgenden fünfstelligen Zahl sind zwei Ziffern unleserlich.

$27**7$

Füge 2 Ziffern so ein, dass die Zahl durch 3 teilbar ist. Die Ziffern 2 und 7 dürfen nicht mehr verwendet werden. Gib drei Möglichkeiten an.

b) Ersetze die Zeichen durch Zahlen. **Beachte:** Gleiche Platzhalter bedeuten die gleiche Zahl.

$$\begin{array}{cccccccc} \square & + & \circ & + & \Delta & + & \triangle & = & 32 \\ + & & - & & \cdot & & : & & \\ 3 & + & 3 & + & 3 & + & 3 & = & 12 \\ = & & = & & = & & = & & \\ \diamond & & \diamond & & \diamond & & \diamond & & \end{array}$$

c) Setze die Zeichen +, -, · und : jeweils einmal für die Platzhalter ein, Klammern dürfen zusätzlich verwendet werden. Gib 4 verschiedene Möglichkeiten an!

$$3 \square 3 \diamond 3 \nabla 3 \circ 3 = 3$$