MATHEMATIK-WETTBEWERB 2005/2006 DES LANDES HESSEN

3. RUNDE – LÖSUNGEN DER AUFGABENGRUPPE A

1. a) $x^2 \cdot (1 - x^2) > -(x^2 + 7) \cdot (x^2 - 7) \quad \Rightarrow$

   $L = \{8, 9, 10, \ldots\} \cup \{-8, -9, -10, \ldots\}$

   b) $(x^4 - 16) \cdot (x + 3) \cdot (x^2 + 25) = 0 \quad \Rightarrow$
   $L = \{-3, -2, 2\}$

   c) $(x^3 - 4)^2 - 16 > 0 \quad \Rightarrow$
   $L = Z \setminus \{0, 1, 2\}$

   d) $(x^2 - 256) = (x - 16) \cdot (x + 16)^3 \quad \Rightarrow$

   $L = \{-17, -16, -15, 16\}$

---

2. a) $\measuredangle DCB = 90°$

   b) (1) $\measuredangle DCA = 90° - \gamma$ (Dreieck DBC)
   $\measuredangle HAC = 90° - \gamma$ (Dreieck AGC)

   (2) $\measuredangle AEF = \gamma$ (Umfangswinkel über der Strecke $\overline{AB}$)

   c) $\overline{DE} \parallel \overline{CA}$, 90°-Winkel bei E und F
   $\measuredangle FAE = 90° - \gamma$ (Dreieck EAF)

   d) Nachweis: $\measuredangle CBE = \measuredangle DBA$
   z.B.: Umfangswinkel über der Strecke $\overline{CE}$ gleich dem Umfangswinkel über der Strecke $\overline{DA}$, $|CE| = |DA|$ aufgrund der Symmetrie des Trapezes ACDE.

---

3. a) a = 5 cm
   $6(a + 3)^2 = 6a^2 + 234$

   b) z.B.: beide Grundkanten werden um 100 % vergrößert oder eine Grundkante wird um 50 % verkleinert (halbiert) und die andere um 700 % vergrößert (verachtfacht) oder eine Grundkante bleibt unverändert, die andere wird vervierfacht.

   c) $|CD| = 3g$
   $2 \bullet h \bullet \frac{x + g}{2} = h \bullet \frac{x + 5g}{2}$

---

4. a) Konstruktion des Dreiecks ABC,
   Hinweise zur Konstruktion: Bel. Gerade AB und Antragung von α, Winkelhalbierende w_α, Parallele zu AB im Abstand 3 cm, Bestimmung von M, Antragung von $\measuredangle AMB = 120°$, $\measuredangle CBA = 50°$.

   b) Konstruktion des Trapezes ABCD,
   Hinweise zur Konstruktion: Bel. Gerade AB und Antragung von α, Winkelhalbierende w_α, Parallelen zu AB im Abstand 3 cm (g_1) und 6 cm (g_2), Kreis um A mit $r = |AC| = 10$ cm schneidet g_2 in C, Winkelhalbierende w_α schneidet g_1 in M, Thaleskreis über $\overline{MC}$.

   c) Konstruktion des Vierecks ABCD,
   Hinweise zur Konstruktion: $\measuredangle BAD$, Winkelhalbierende w_α, Parallelen im Abstand $r_i = 3$ cm zu AB oder AD schneiden die Winkelhalbierende in M. Da das Viereck einen Umkreis besitzt, gilt $\beta = \delta = 90°$.

---

5. a) (1) Anwendung Distr.-Gesetz: $(1 + n + n^2 + n^3 + n^4) \cdot (n - 1) = n^5 - 1$
   (2) $(n^8 - 1) : (n - 1) = 1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7$ **oder**
   $(n^8 - 1) : (n - 1) = (n^4 + 1)(n^2 + 1)(n + 1)$
   b) (1) $(5^{20} - 1) = 4 \cdot (1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{19}) \Rightarrow$ a ist durch 8 teilbar oder
   $(5^{20} - 1) = (5^{10} + 1)(5^5 + 1)(5^5 - 1) \Rightarrow$ a ist durch 8 teilbar
   (2) $n \in \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
   (3) $n = 8$ (oder 16, 24, 32, 40, …), da z.B.:
   $(5^8 - 1) = (5^4 + 1)(5^2 + 1)(5 + 1)(5 - 1)$,
   Alle 4 Faktoren sind durch 2 teilbar.
   c) z.B.: $10 \mid (3^{4n} - 1)$ oder $10 \mid (7^{4n} - 1)$ oder $10 \mid (9^{2n} - 1)$

---

6. a) $D_4 = 10$, $D_5 = 15$, $D_6 = 21$, $D_7 = 28$
   b) Begründung; z.B.: Ergänzung zum Rechteck $\Rightarrow n \cdot (n + 1)$ Punkte im Rechteck
   c) Begründung, z.B.: $\frac{1}{2} n(n + 1) + \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + n + 2) = (n + 1)^2$
   d) Begründung, z.B.: $n(n+1)$, $(n+1)(n + 2)$, $(n + 2)(n + 3)$
   Entweder ist n und (n + 3) durch 3 teilbar oder (n+1) oder (n+2) sind durch 3 teilbar.
   e) $\frac{1}{4}(n + 1)^2(n + 2)^2 - \frac{1}{4} n^2(n + 1)^2 = \frac{1}{4}(n + 1)^2[(n + 2)^2 - n^2] = (n + 1)^3$

---

7. a) (1) $p = 0{,}4^5$
   (2) $p = 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4$
   (3) $p = 0{,}4^5 + 5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^4$
   (4) $p = 1 - 0{,}6^5$
   b) $p = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}74 = 74\ \%$
   c) $x = 0{,}7$ und $y = 0{,}4$ oder $x = 0{,}4$ und $y = 0{,}2$ oder $x = 0{,}25$ und $y = 0{,}1$
   (x Anteil der Wechsler von TG, y Anteil der Wechsler von AF)
   $0{,}36 = 0{,}4 \cdot (1 - x) + 0{,}6 \cdot y$ oder $40x - 60y = 4$

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2005/2006 DES LANDES HESSEN

1. RUNDE – LÖSUNGEN DER AUFGABENGRUPPE B

1. a) $5(x + 3) + 7 = 3x - (4x - 10) \quad \Rightarrow \quad 5x + 15 + 7 = 3x - 4x + 10 \Rightarrow$
   $6x + 12 = 10$
   $L = \{-2\}$

   b) $(3x - 2)(2x + 4) = 6x^2 + 3x - 7 \Rightarrow \quad 6x^2 - 4x + 12x - 8 = 6x^2 + 3x - 7 \quad \Rightarrow$
   $5x = 1$
   $L = \{\}$

   c) $(2x + 0{,}3)^2 \le (2x - 0{,}4)^2 - 5{,}67 \Rightarrow \quad 4x^2 + 1{,}2x + 0{,}09 \le 4x^2 - 1{,}6x + 0{,}16 - 5{,}67 \quad \Rightarrow$
   $2{,}8x \le -5{,}6 \quad \Rightarrow \quad x \le -2$
   $L = \{ -2, -3, -4, \ldots\}$

   d) $(4x - 5)(4x + 5) = 4 - (-15x^2 - 20) \Rightarrow \quad 16x^2 - 25 = 4 + 15x^2 + 20 \quad \Rightarrow$
   $x^2 = 49$
   $L = \{7, -7\}$

---

2. a) (1) Koordinatensystem und Quadrat ABCD
   (2) Gerade MP

   b) $A = 14\ cm^2$
   c) 12,5%
   d) $|BQ| = 3{,}2$ cm
   e) A’(5|–1), B’(5|3), D’(1|–1)
   f) (1) $A = 24\ cm^2$
   (2) $\frac{2}{3}$ oder $66\frac{2}{3}\,\%$

---

3. a) (1) 60 %
   (2) Kreisdiagramm mit:
   Soja entspricht 216°, Baumwolle entspricht 40°, Raps entspricht 20°,
   Mais entspricht 84°

   b) 5 Mio. ha
   c) (1) 5000 %
   (2) 1,8 Mio. ha
   (3) Eine jährliche Verfünffachung ist falsch – mit Begründung.

---

4. a) Konstruktion des Trapezes ABCD; Hinweise zur Konstruktion: Seite a und Antragen von α, Kreis um B mit r = 6,5 cm, Parallele zu a durch D oder $\beta = 100°$ antragen und Kreis um A.

   b) Konstruktion des Parallelogramms ABCD; Hinweise zur Konstruktion: Konstruktion des Teildreiecks ABM (die Diagonalen halbieren sich), Verdoppeln von $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$.

   c) Konstruktion des Drachenvierecks ABCD; Hinweise zur Konstruktion: $\overline{BD}$ und Mittelsenkrechte AC, Kreis um B oder D mit r = 3,5 cm, $\triangle DBA = 70°$ oder $\triangle ADB = 70°$ oder $0{,}5\alpha = 20°$ in A* auf AC antragen und Parallelverschiebung.

---

5. a) (1) $x + 2x + 2x = 45$; dabei ist x die Basis.
Basis = 9 cm   Schenkel = 18 cm
(2) $x + (x + 3) + (x + 3) = 45$; dabei ist x die Basis.
Basis = 13 cm   Schenkel = 16 cm

b) $(2b + 7) \cdot (b - 3) = 2b \cdot b + 45 \Rightarrow 2b^2 - 6b + 7b - 21 = 2b^2 + 45$
$b = 66$ cm ; $a = 132$ cm

c) $6(a + 2)^2 = 6a^2 + 240 \Rightarrow 6a^2 + 24a + 24 = 6a^2 + 240$
$a = 9$ cm

---

6. a) (1) $p = \frac{1}{36}$

(2) $p = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

(3) $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(4) $p = \frac{11}{36}$

(5) $p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

b) (1) $p = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$

(2) $p = \frac{90}{90} - \left(\frac{20}{90} + \frac{2}{90} + \frac{6}{90}\right) = \frac{25}{90} + \frac{21}{90} + \frac{16}{90} = \frac{62}{90} = \frac{31}{45}$

---

7. a)

a	4	4	6	1	10	**9**
b	3	5	**6**	**2**	**15**	**2**
G.I.	6	**12**	25	**0**	**126**	8
G.R.	14	**18**	**24**	6	50	22

b) Anzahl der Gitterpunkte im Inneren ist $GI = (a - 1) \cdot (b - 1)$
Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand ist $GR = (a + b) \cdot 2$ (= u)

c) (1) 169
(2) (5, 7) oder (4, 11)

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2005/2006 DES LANDES HESSEN

1. RUNDE – LÖSUNGEN DER AUFGABENGRUPPE C

1. a) (1) $3x - 8 + 4x - 11 = 11x - 5 - 7x + 7$
   $7x - 19 = 4x + 2$
   $3x = 21$
   $x = 7$
   (2) $5x + 7 - (2x + 3) = -23$
   $5x + 7 - 2x - 3 = -23$
   $3x + 4 = -23$
   $3x = -27$
   $x = -9$
   (3) $5 \cdot (2x + 1) = 10 - 3 \cdot (4 - 3x)$
   $10x + 5 = 10 - 12 + 9x$
   $x + 5 = -2$
   $x = -7$
   b) $7x - 3 = 3x + 5 \;\Rightarrow\; x = 2$
   c) z.B.: Wenn man zum Dreifachen einer Zahl 4 addiert, so erhält man 11.

---

2. a) (1) Koordinatensystem und Einzeichnung der 5 Punkte
   (2) $A = 39\ \text{cm}^2$
   Rechteck: $A = 6\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm} = 18\ \text{cm}^2$
   Dreieck: $A = 0{,}5 \cdot 10\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm} = 15\ \text{cm}^2$
   Dreieck: $A = 0{,}5 \cdot 4\ \text{cm} \cdot 3\ \text{cm} = 6\ \text{cm}^2$
   b) z.B.: g = 12 cm, h = 8 cm oder g = 6 cm, h = 16 cm
   c) g = 4 cm , denn für den Flächeninhalt des Trapezes gilt: $A = \frac{(5+3)\cdot 3{,}5}{2}\ \text{cm}^2 = 14\ \text{cm}^2$

---

3. a) (1) Konstruktion des Dreiecks ABC; Konstruktion nach SWS.
   (2) Flächeninhalt: $A = 0{,}5 \cdot 5\ \text{cm} \cdot 4\ \text{cm} = 10\ \text{cm}^2$
   b) (1) Höhe ≈ 260 m (H = 262,1 m)
   (2) 1:10 000
   1 cm entspricht 100 m oder 3 cm entsprechen 300 m
   c) Dies ist nicht möglich, die beiden Basiswinkel sind gleich groß.

---

4. a) Volumen des Quaders: $V = 11 \cdot 3 \cdot 5\ \text{cm}^3 = 165\ \text{cm}^3$
   b) Volumen des Würfels: $V = 3^3\ \text{cm}^3 = 27\ \text{cm}^3$; die Kantenlänge des Würfels beträgt 3 cm.
   c) Die Veränderung beträgt 16, 4 %, denn $\frac{27}{165} \approx 0{,}1636$.
   d) Die Oberfläche des Quaders beträgt: $O = 2\,(3 \cdot 5 + 11 \cdot 5 + 3 \cdot 11)\ \text{cm}^2 = 206\ \text{cm}^2$
   e) Die Oberfläche des Restkörpers beträgt $224\ \text{cm}^2$, denn $O = 206\ \text{cm}^2 + 2 \cdot 9\ \text{cm}^2$
   f) Der Körper besitzt eine Masse von $M = 138 \cdot 0{,}9\ \text{g} = 124{,}2\ \text{g}$.

---

5. a) (1) 16 % = $\frac{12}{75}$

(2) 27 %

(3) 33,00 €

b) (1) Paul sollte sich für die 2. Möglichkeit entscheiden. – mit Begründung

Möglichkeit 1:		65,00 €
Möglichkeit 2:	1. Monat	55,00 €
	2. Monat	60,50 €
	3. Monat	66,55 €

(2) 30 %

c) 40,00 €

---

6. a) 35,40 € = 30,45 € + 4,95 €

b) 35,55 €

c) 160 Minuten

58,85 € = 4,95 € + 14,75 € + 39,15 €

---

7. a) z.B.: 2 7 1 1 7, 2 7 1 4 7, 2 7 3 8 7

b) ⌂ = 18 Δ = 2 ○ = 9 □ = 3 ◊ = 6

c) 3 + 3 • 3 : 3 – 3 = 3

(3 – 3) • 3 : 3 + 3 = 3

(3 : 3 + 3 – 3) • 3 = 3

(3 • 3 – 3 + 3) : 3 = 3

oder andere Möglichkeiten
