AUFGABENGRUPPE A **15.05.2007**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge für $x \in \mathbb{Z}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ an.

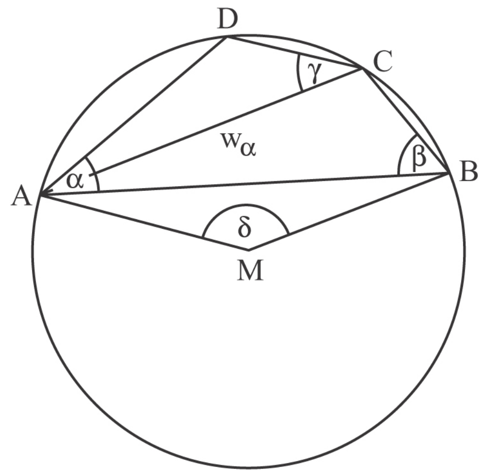
   a) $x^2 - a^2 = 0$
   b) $x^2 + a^2 = 0$
   c) $x^2 - a^2 = 9$
   d) $x^4 - a^2 = 1$
   e) $(x - a)^3 = x^3 - a^3$

2. a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $|AB| = 7$ cm, $|AC| = 5$ cm und $|BC| = 4$ cm. Konstruiere einen Kreis durch A und C mit der Tangente AB.

   b) Zeichne die Strecke $\overline{AB}$ mit $|AB| = 7$ cm und eine Parallele g im Abstand von 5 cm. Konstruiere einen Kreis durch A und B mit der Tangente g.

   c) Zeichne die Punkte A, B und P auf einer Geraden h mit $|AB| = 7$ cm, $|BP| = 2$ cm und $|AP| = 9$ cm.
   Konstruiere einen Kreis durch A und B mit der Senkrechten zu h durch P als Tangente.

3. In der nebenstehenden Figur ist $ABCD$ ein Sehnenviereck und AC ist die Winkelhalbierende w_α von α.



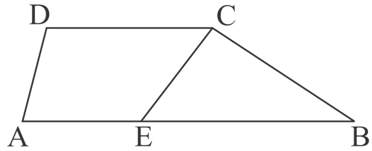
   a) Zeige, dass die Dreiecke MBC und MCD kongruent sind.

   b) Es sei $\delta = 140°$.

      (1) Berechne für $\alpha = 40°$ die Größe der Winkel β und γ.
      (2) Wie groß ist α zu wählen, damit $\overline{AB} \| \overline{DC}$ gilt?

   c) Es sei $\delta = 180°$ und $\alpha < 90°$. Begründe, dass $\overline{MC} \| \overline{AD}$ ist.

4. In einem Trapez $ABCD$ wie in der nebenstehenden Abbildung wird die Höhe mit x bezeichnet.



   a) Es gilt außerdem $|CD| = x$ und $|AB| = 3x$.

      (1) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ für $x = 3$ cm.
      (2) Welcher Zusammenhang muss zwischen $|EB|$ und x gelten, damit die Strecke $\overline{CE}$ die Fläche des Trapezes $ABCD$ halbiert?
      (3) Welche Art von Viereck $AECD$ entsteht beim Halbieren? Begründe deine Antwort.

   b) Nun ist $|EB| = 5x$ und die Strecke $\overline{CE}$ teilt das Trapez $ABCD$ so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks EBC ein Drittel der Fläche des Trapezes $ABCD$ beträgt.

      (1) Wie können hierfür die Längen der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in Abhängigkeit von x gewählt werden? Gib zwei Möglichkeiten an.
      (2) Wie müssen die Längen von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in Abhängigkeit von x gewählt werden, damit das Trapez $ABCD$ zu einem Parallelogramm wird?

5. Im Dezimalsystem kann jede natürliche Zahl als Summe der Vielfachen von Zehnerpotenzen geschrieben werden. Jede natürliche Zahl kann jedoch auch in einem Stellenwertsystem mit einer anderen Basis b ($b \geq 2$) dargestellt werden. Zur Kennzeichnung dieser Zahlen wird die Basis tiefgestellt in Klammern hinzugefügt.

   Zum Beispiel: $245 = 3 \cdot \mathit{64} + 6 \cdot \mathit{8} + 5 \cdot \mathit{1} = 3 \cdot \mathit{8}^{\mathit{2}} + 6 \cdot \mathit{8}^{\mathit{1}} + 5 \cdot \mathit{8}^{\mathit{0}} = 365_{(\mathit{8})}$

   a) Schreibe 135 im Stellenwertsystem mit der Basis 8.

   b) In welchen Stellenwertsystemen gilt:

      (1) $50 = 32_{(b)}$

      (2) $40 = 130_{(b)}$

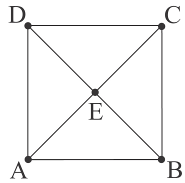
   c) Bestimme die Basis b so, dass $324_{(b)} + 145_{(b)} = 502_{(b)}$ gilt.

   d) Es gibt Basen b mit $345_{(b)} + 453_{(b)} = 798_{(b)}$. Gib zwei Möglichkeiten an.

   e) Bestimme zwei Zahlenpaare $(a|b)$, für die gilt: $100_{(a)} = 40_{(b)}$ mit $a \neq b$.

   f) Begründe, warum es keine Zahlenpaare $(a|b)$ gibt mit: $10_{(a)} + 100_{(b)} = 1000_{(a)}$.

6. a) In der nebenstehenden Figur sollen die Strecken mit einem Stift nachgezogen werden, und zwar so, dass jede Strecke genau einmal nachgefahren wird. Der Stift kann abgesetzt werden, d.h. es dürfen auch mehrere Streckenzüge verwendet werden.

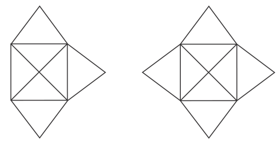


      (1) Gib zwei Möglichkeiten dafür an.

      (2) Wie viele Streckenzüge benötigt man mindestens?

      (3) Bei solchen Figuren treffen sich an jedem Verzweigungspunkt mindestens zwei Strecken. Je nach der Anzahl der Strecken, die sich in einem Punkt treffen, unterscheidet man gerade bzw. ungerade Verzweigungspunkte.
      Begründe, dass für die obige Figur gilt: Die Anzahl der ungeraden Verzweigungspunkte ist doppelt so groß wie die Mindestzahl der benötigten Streckenzüge.

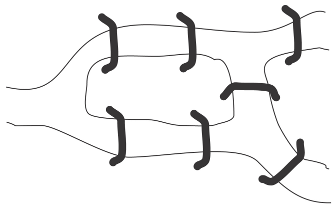
   b) Kann man die nebenstehenden Figuren in einem Zug zeichnen? Begründe.



(1) (2)

   c) Zeige, dass der Zusammenhang aus a) (3) allgemeingültig ist.

   d) Früher gab es in der Stadt Königsberg sieben Brücken über den Fluss Pregel (siehe nebenstehende Skizze). Kann man hier einen Weg angeben, bei dem man jede der Brücken genau einmal überquert und am Ende wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt? Begründe.



7. In drei Urnen befinden sich jeweils 12 Kugeln, in jeder davon in den Farben blau, rot und weiß.

   a) Aus der ersten Urne wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Beide Kugeln sind blau. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{1}{9}$. Wie viele blaue Kugeln sind in der Urne?

   b) Aus der zweiten Urne wird ebenfalls zweimal mit Zurücklegen gezogen. Beide Kugeln sind rot. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{1}{4}$. Nachdem man die beiden Kugeln zurückgelegt hatte, werden aus der zweiten Urne erneut zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen, diesmal eine rote und eine blaue. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{5}{12}$. Wie viele blaue Kugeln sind in der Urne? Wie viele weiße sind enthalten?

   c) Aus der dritten Urne wird auch zweimal mit Zurücklegen gezogen. Eine der gezogenen Kugeln ist rot, die andere weiß. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\frac{1}{6}$. Wie viele rote, weiße und blaue Kugeln kann es in dieser Urne geben? Gib alle Möglichkeiten an.

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

AUFGABENGRUPPE B **15.05.2007**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

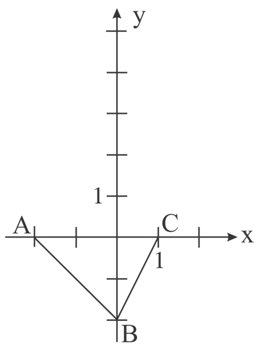
1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

   a) $7 \cdot (2x - 8) - 9x = 9x - (8 - 4x)$

   b) $(2x + 1)^2 > \frac{1}{3} \cdot (12x^2 + 60)$

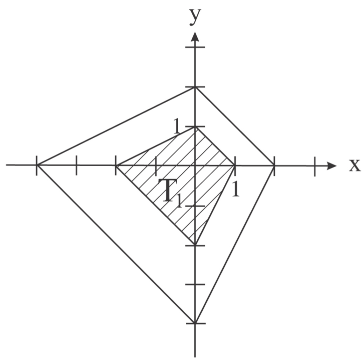
   c) $(x - 2) \cdot (x^2 - 1) = 0$

   d) Die Differenz der Quadrate zweier aufeinander folgender ganzer Zahlen beträgt 55. Wie heißen die Zahlen? Stelle eine Gleichung auf und nenne alle möglichen Lösungen.



2. a) Finde im nebenstehenden Bild einen Punkt D auf der y-Achse, sodass der Flächeninhalt des Vierecks ABCD 9 cm^2 beträgt. Gib die Koordinaten von D an.

   b) Im nebenstehenden Bild liegen die Eckpunkte der Trapeze T_1, T_2, T_3, ... auf den Achsen des Koordinatensystems. T_1 wird gebildet durch $A_1(-2|0)$, $B_1(0|-2)$, $C_1(1|0)$ und $D_1(0|1)$. Der Abstand der Eckpunkte von T_2 (großes Trapez) vom Ursprung ist doppelt so groß wie der bei T_1, die Eckpunkte von T_3 haben den dreifachen, die von T_4 den vierfachen Abstand und so weiter. Der Punkt B_3 des Trapezes T_3 hat also die Koordinaten $(0|-6)$.



   (1) Bestimme die Koordinaten von D_4 und A_6.

   (2) Zu welchem Trapez gehört der Punkt $B_n(0|-10)$?

   (3) Der Flächeninhalt von T_1 beträgt 4,5 cm^2. Bestimme jeweils den Flächeninhalt von T_2, T_3 und T_{10}.

   (4) Der Flächeninhalt von T_n beträgt 1800 cm^2. Bestimme n.

3. Das Berliner Olympiastadion wurde zur Fußball-WM 2006 umgebaut (größtmögliche Zuschauerzahl danach: 74 000). Die Kosten von 242 Millionen Euro übernahmen zu 81 % das Land Berlin und der Bund. Für den Rest kam ein privater Investor auf.

   a) Wie hoch waren die Kosten, die von dem privaten Investor aufgewendet werden mussten?

   b) Die Umbaukosten von 242 Millionen Euro waren insgesamt 21 % höher als ursprünglich geplant. Um wie viel Euro verteuerte sich der Umbau?

   c) Die Zuschauerzahl wurde für das WM-Finale aus Sicherheitsgründen auf 65 000 begrenzt. Um wie viel Prozent verringerte sich die Zuschauerzahl? Runde auf eine Nachkommastelle.

   d) Bei einem ausverkauften Bundesligaspiel betrugen die Einnahmen aus dem Ticketverkauf insgesamt 1 630 960 €. West- und Ostkurve haben gleiche Fassungsvermögen und gleiche Ticketpreise. Auf die Haupt- und Gegentribüne passen jeweils 22 % der Zuschauer. Wie teuer ist ein Ticket in der Ostkurve?

Ticketpreise:	
Haupttribüne	36 €
Gegentribüne	26 €
Westkurve	
Ostkurve	

4. a) Konstruiere eine Raute $ABCD$ mit $\alpha = 130°$ und $a = |AB| = 3{,}5$ cm.

   b) Konstruiere eine Raute $ABCD$ mit $\alpha = 115°$ und $h_a = 4$ cm.

   c) Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\delta = 110°$, $e = |AC| = 7$ cm und $c = |CD| = 5$ cm.

   d) Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\alpha = 50°$, $h_a = 3{,}5$ cm und $h_d = 5$ cm.

5. Eistee wird oft im Tetrapak angeboten. Eine Packung ist 9 cm lang, 6 cm breit und 20 cm hoch.

   a) Handelt es sich hier um eine 0,1 Liter-, 1,0 Liter- oder 10 Liter-Packung? Begründe durch Rechnung.

   b) Aus Werbegründen soll der Behälter eine quadratische Grundfläche ($a = 6$ cm) bekommen. Wie hoch ist der Tetrapak dann mindestens, wenn sich das Fassungsvermögen nicht ändern soll? Runde gegebenenfalls auf Zentimeter.

   c) Man möchte 24 Paks so anordnen, dass sie in eine quaderförmige Verpackungskiste passen. Dabei sollen keine Paks übereinander gestapelt werden. Finde alle Möglichkeiten.

   d) Wie viel kostet eine solche Kiste, wenn man für 5 Packungen Eistee 2,80 € bezahlt?

   e) Zur Markteinführung werden am ersten Verkaufstag 3 Packungen zum Preis für 2 angeboten. Wie viele Packungen müsste man mindestens einkaufen, um gegenüber dem Normalpreis 10 € einzusparen?

6. Ein Radiosender veranstaltet ein Glücksspiel. In einer Trommel befinden sich Kugeln mit aufgedruckten Geldbeträgen. Jeder Teilnehmer darf dreimal ziehen, wobei jede gezogene Kugel nach dem Notieren des Geldbetrages sofort wieder zurückgelegt wird. Die drei Geldbeträge werden addiert und als Gewinn ausbezahlt.

In der Trommel sind:		
19	Kugeln	zu 1 ct
17	Kugeln	zu 2 ct
15	Kugeln	zu 5 ct
10	Kugeln	zu 10 ct
20	Kugeln	zu 20 ct
10	Kugeln	zu 50 ct
5	Kugeln	zu 1 €
3	Kugeln	zu 2 €
1	Kugel	zu 5 €

   a) Wie viele Kugeln sind vor jedem Ziehen in der Trommel?

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug eine 2 €-Kugel zu ziehen?

   c) Wie hoch ist der größtmögliche Gewinn?

   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den kleinstmöglichen Gewinn zu erzielen?

   e) (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine 20 ct-, dann eine 2 ct- und zuletzt eine 1 €-Kugel zu ziehen?

      (2) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 1,22 € zu gewinnen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?

   f) Man erhält den Hauptgewinn von 1000 €, wenn man mit drei Kugeln eine „Schnapszahl" wie z.B. 1,11 € zieht. Welche der möglichen „Schnapszahlen" ist am wahrscheinlichsten?

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

7. a) Zahlen-Sudoku:
   In jeder Zeile (waagrecht) und in jeder Spalte (senkrecht) müssen alle Zahlen von 1 bis 9 stehen. In jedem 3×3-Quadrat muss jede Zahl von 1 bis 9 vorkommen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1		5	4			7		6
2	6		4	7	5	9			
3	7		3	6		1	4	9	
4	9	1				7	6	5	
5	3		2		4	5	1	8	
6	5					8	9	3	2
7	2	7	9	8	1	6	5	4	3
8	4		6	5	9				
9		5			7	4		6	9

      (1) Ergänze die Zahlen in den grau unterlegten Feldern. (Beispiel: D2: 7)

      (2) In dem Sudoku fehlt noch eine 5. Gib ihre Position an und begründe.

   b) Buchstaben-Sudoku: In jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem 2×2-Quadrat muss jeder Buchstabe A, B, C, D genau einmal vorkommen.

A			
	B		
		B	
			A

      (1) Übernimm das nebenstehende Sudoku und fülle es aus.

      (2) Wie viele verschiedene Lösungen gibt es für das nebenstehende Sudoku?

      (3) Du hast ein leeres Buchstaben-Sudoku und sollst auf dem Spielfeld die vier Buchstaben D nach den geltenden Spielregeln verteilen. Für das erste D (D_1) stehen dir also 16 mögliche Felder zur Verfügung.

         (3.1) Wie viele mögliche Felder gibt es für D_2, D_3 bzw. D_4?

         (3.2) Berechne die Anzahl aller Möglichkeiten, die vier Buchstaben D auf einem Buchstaben-Sudoku zu verteilen.

AUFGABENGRUPPE C **15.05.2007**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Berechne x.
   (1) $5 \cdot (x-2) + 6 = 31$
   (2) $10x + 35 - 4x - 53 = 27 + x + 11 + 4x$
   (3) $3 \cdot (2x - 18) - 4 = 3x - 4 \cdot (3x - 8)$

   b) In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel an der Spitze halb so groß wie ein Basiswinkel. Wie groß sind die drei Winkel des Dreiecks?

2. Ein Aquarium ist 60 cm lang, 40 cm breit und 30 cm hoch. Auf dem Boden ist eine 4 cm hohe Nährschicht, darüber sind 3 cm Kies, damit die Nährschicht am Boden bleibt.

   a) Zeichne ein Schrägbild des Aquariums im geeigneten Maßstab.
   b) Das Aquarium ist oben offen. Reicht ein Quadratmeter Glas zum Bau des Aquariums? Begründe.
   c) Eine Kunststoffplatte deckt das Aquarium zu $\frac{5}{6}$ ab. Wie groß ist die Platte mindestens?
   d) Der Nährboden wird in 1-Liter-Beuteln angeboten. Wie viele Beutel müssen mindestens gekauft werden?
   e) Im Aquarium befinden sich 50 Liter Wasser. Nach einer Woche sind 0,5 % davon verdunstet. Wie viel Wasser muss nach einer Woche nachgefüllt werden?

3. Die erste Fußballweltmeisterschaft fand im Jahr 1930 statt. Seitdem wurden alle vier Jahre – außer 1942 und 1946 – Fußballweltmeisterschaften ausgetragen. Die Tabelle zeigt die Verteilung der Eintrittskarten der WM im Jahr 2006.

	Anzahl der Eintrittskarten
Ehrengäste, Medien, Sicherheitsreserve	440 000
Partner, Förderer und TV-Rechteinhaber	619 000
DFB und FIFA	580 000
Verkauf über teilnehmende Landesverbände	468 000
Öffentlicher Verkauf (einschließlich VIP-Sitze und Logen)	1 260 000

   a) (1) Die wievielte Fußballweltmeisterschaft fand 2006 statt?
   (2) Gib die Gesamtzahl aller Eintrittskarten für die WM 2006 an.
   (3) Es wurden 33,3 % aller Eintrittskarten online verkauft.
   Wie viele Eintrittskarten sind das? Runde auf volle Tausender.
   (4) Franz behauptet: „Da entfallen ja mehr als ein Achtel der Eintrittskarten auf Ehrengäste, Medien und Sicherheitsreserve!“ Hat Franz Recht? Begründe durch Rechnung.

   b) Für 17 Heimspiele des Fußballclubs Zwietracht kostet die Dauerkarte auf der Haupttribüne 612 €. Eine Tageskarte kostet dort 45 €. Rudi geht zu jedem Spiel.
   (1) Wie viel Euro spart er beim Kauf einer Dauerkarte insgesamt?
   Wie viel Euro sind das pro Karte?
   (2) Zu wie vielen Spielen muss man mindestens gehen, damit sich der Kauf einer Dauerkarte rechnet?

4. a) Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $c = 5,5$ cm und $\gamma = 100°$.
   Gib die Größe der Basiswinkel an.

   b) (1) Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $c = 8$ cm und $a = b = 5$ cm.
   (2) Spiegle den Punkt C an der Dreiecksseite c und bezeichne den Bildpunkt mit C'.
   Ergänze zum Viereck.
   (3) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Vierecks $AC'BC$.
   (4) Gib Länge und Breite eines Rechtecks an, das den gleichen Umfang und den gleichen Flächeninhalt wie das Viereck $AC'BC$ hat. Begründe.

5. Die Firma Asmussen stellt Segelboote her. Einen Teil der Segelboote verkauft sie ins Ausland, den Rest im Inland.

Jahr	Anzahl der Segelboote	Verkäufe ins Ausland
2004	200	111
2005	220	
2006		180

a) Wie viel Prozent der Segelboote wurden 2004 ins Ausland verkauft?

b) Im Jahr 2005 wurden 65 % der Segelboote ins Ausland verkauft.
Wie viele Boote waren das?

c) Im Jahr 2006 wurden 28 % der Segelboote im Inland verkauft.
Wie viele Segelboote waren das?

d) Von 2006 bis 2007 soll die Anzahl der hergestellten Segelboote um 12 % gesteigert werden.
Wie viel Boote müssen 2007 insgesamt produziert werden?

6. An einem Bratwurststand werden im Durchschnitt pro Tag 400 Bratwürste verkauft und dafür 960 € eingenommen.

a) (1) An einem Ferientag wurden die Einnahmen gegenüber dem Durchschnitt um 25 % gesteigert. Wie viele Bratwürste wurden verkauft?

(2) An einem Regentag wurden 160 Bratwürste weniger verkauft als im Durchschnitt. Wie hoch waren die Einnahmen?

b) In einer Wanne befindet sich Wurstmasse. Daraus können 750 Bratwürste hergestellt werden, wenn eine Wurst 100 Gramm wiegt.
Wie viele Bratwürste zu 125 Gramm können aus der gleichen Masse hergestellt werden?

c) Herr Hausmann kauft zwei Steaks (Kilopreis 19,00 €) und beschwert sich, dass der Fleischverkäufer die Steaks mit dem Papier gewogen hat.
Der Verkäufer sagt: „Ich habe doch abgerundet und vier Cent vom Preis abgezogen, das kommt hin!“
Herr Hausmann lässt das Papier auswiegen. Es wiegt 18 Gramm.
Hat der Verkäufer Recht? Begründe durch Rechnung.

7. Bei einem Klassenfest der H8 werden verschiedene Spiele angeboten, bei denen Preise zu gewinnen sind.

a) Lisa und Kira gehen zur Würfelstation. Jede würfelt gleichzeitig mit zwei gleichen Würfeln.

(1) Lisa würfelt die größtmögliche Augensumme, Kira die kleinstmögliche Augensumme. Gib die jeweilige Augensumme an.

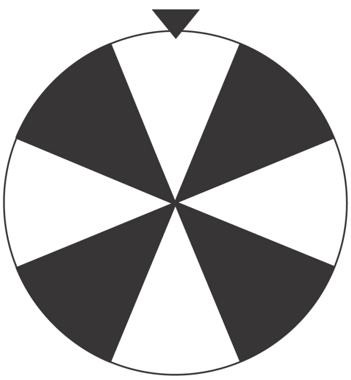
(2) Man gewinnt, wenn die Augensumme größer als 9 ist. Gib alle möglichen Zahlenpaare an.

(3) Die Augenzahl jedes Würfels soll eine Primzahl sein. Nenne alle Zahlenpaare.

(4) Die Augenzahl jedes Würfels soll eine Primzahl sein und die Augensumme soll auch eine Primzahl darstellen. Nenne alle Zahlenpaare.

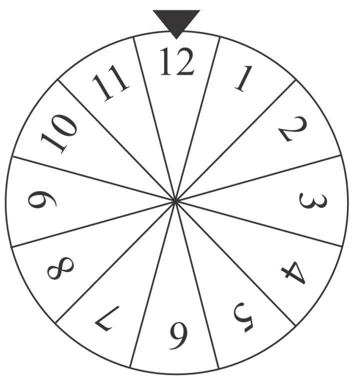
b) Bei der nächsten Spielstation werden Glücksräder gedreht. Welches Rad würdest Du drehen? Begründe.

Rad 1



Schwarz gewinnt!

Rad 2



Gerade Zahl gewinnt!