AUFGABENGRUPPE A **06.05.2008**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge für $x \in \mathbb{Q}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{Z}$ an.

   a) $x \cdot (a+3) = (x+2) \cdot (a+1)$

   b) $7a + (a+7) \cdot x = 6x - 7$

   c) $x \cdot a = x + a$

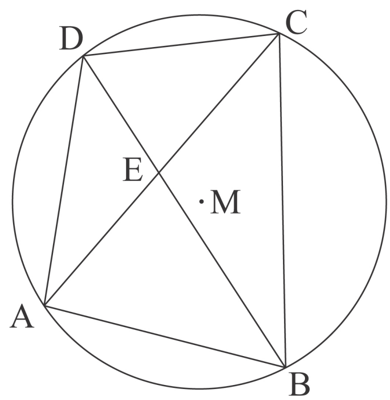
   d) $x^2 \cdot (2a+1) = a^2 \cdot (1+x) \cdot (1-x)$

2. a) Konstruiere ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ sowie $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 7$ cm und $|CD| = 4$ cm.

   b) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 6$ cm, $h_a = 4$ cm und $h_b = 5$ cm.

   c) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $a = 5$ cm, $b + c = 8$ cm und $\beta = 50°$.

3. Gegeben ist das Sehnenviereck $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt E und dem Mittelpunkt M des Umkreises.

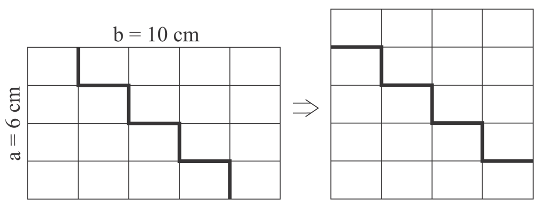


   a) Zeige: Das Dreieck AED und das Dreieck BCE sind winkelgleich.

   b) Es sei $\alpha = \sphericalangle BAD = 90°$, $\beta = \sphericalangle CBA = 75°$ und $\varepsilon = \sphericalangle AEB = 60°$. Berechne $\varphi = \sphericalangle BAE$.

   c) Es sei weiterhin $\alpha = \sphericalangle BAD = 90°$ und $\varepsilon = \sphericalangle AEB = 60°$. Wie groß muss $\beta = \sphericalangle CBA$ sein, damit gilt $\overline{CM} \parallel \overline{DA}$?

4. a) Ein Rechteck soll in ein anderes flächengleiches Rechteck verwandelt werden, indem man es mit einem Streckenzug teilt und dann neu zusammensetzt (siehe nebenstehende Abbildung).



   (1) Es ist $a = 6$ cm und $b = 10$ cm. Gib die Seitenlängen a' und b' des neuen Rechtecks an.

   (2) Die Seite a desselben Rechtecks wird nun in drei Teile zerlegt. Zeichne das Rechteck mit einer geeigneten Zerlegung von b.

   (3) Die Strecke a wird in k Teile, die Strecke b in m Teile zerlegt. Welcher Zusammenhang besteht zwischen k und m?

   b) Nun soll ein Rechteck mit derselben Methode zerlegt werden, aber nach dem Zusammensetzen soll sich ein Quadrat ergeben.

   (1) Das Rechteck hat die Seitenlängen $a = 2$ cm und $b = 4,5$ cm. Zeichne eine geeignete Zerlegung.

   (2) Zeige, dass für (beliebige) Seitenlängen a und b stets gilt: $\frac{a}{b} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$ $(n \in \mathbb{N})$

   c) Jetzt soll ein Quadrat mit der Seitenlänge $q = 6$ cm mit derselben Methode in ein flächengleiches Rechteck mit den Seitenlängen a und b verwandelt werden, wobei der Zusammenhang aus b) (2) nach wie vor gilt. Zeichne eine geeignete Zerlegung.

5. 11 und 101 sind Primzahlen. Im Folgenden werden die Primfaktorzerlegungen benötigt: $111 = 3 \cdot 37$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $10001 = 73 \cdot 137$

   a) Ein „Trick“ zum Multiplizieren einer zweistelligen Zahl mit 11 lautet: Schreibe zwischen die beiden Ziffern der Zahl die Summe dieser beiden Ziffern. Beispiel: $43 \cdot 11 = 473$ (denn: $7 = 4 + 3$) Welche Eigenschaft muss eine zweistellige Zahl haben, damit dieser „Trick“ funktioniert?

   b) Formuliere einen ähnlichen Trick für die Multiplikation von zweistelligen Zahlen mit 101. Funktioniert dieser Trick für alle zweistelligen Zahlen? Begründe.

   c) Woran kann man erkennen, ob eine sechsstellige Zahl durch 1001 teilbar ist?

   d) Wie viele sechsstellige Zahlen sind sowohl durch 77 als auch durch 143 teilbar?

   e) Welche Primfaktoren haben alle achtstelligen Zahlen mit gleichen Ziffern („Schnapszahlen“) gemeinsam?

6. Christi Himmelfahrt (Vatertag) fällt dieses Jahr auf den 1. Mai (Maifeiertag). Petra und ihre Mutter sind mit dem Frauen-Gymnastikverein auf einem Schiff unterwegs, Jochen und sein Vater fahren mit dem Fußballverein auf der Uferstraße entlang des Flusses auf einem Traktor mit Anhänger. Das Schiff fährt relativ zum Wasser mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30 km/h.

   a) Beide Gruppen wollen gleichzeitig an einem 70 km flussabwärts gelegenen Ausflugslokal ankommen. Der Fluss fließt mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h. Das Schiff startet um 11:00 Uhr. Wann könnte der Traktor starten, wenn er höchstens mit 25 km/h fahren kann? Gib eine Möglichkeit an. Mit welcher Geschwindigkeit müsste er dann fahren?

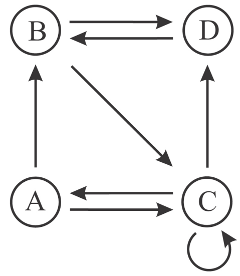
   b) Beide Gruppen starten gleichzeitig vom Ausflugslokal in Richtung eines flussabwärts gelegenen Wildparks. Der Fluss fließt hinter dem Ausflugslokal mit einer Geschwindigkeit von 6 km/h, der Traktor fährt mit 24 km/h. Das Schiff steht unterwegs 15 Minuten in einer Schleuse. Wie weit ist der Wildpark von dem Ausflugslokal entfernt, wenn beide Gruppen dort gleichzeitig eintreffen?

   c) Die Fußballer bleiben im Wildpark, während das Schiff noch bis zur Flussmündung weiterfährt, dort dreht und anschließend wieder zum Wildpark zurückfährt. Die Fahrt vom Wildpark bis zur Flussmündung dauert 27 Minuten, die Rückfahrt 33 Minuten.

      (1) Wie weit ist die Mündung vom Wildpark entfernt?

      (2) Wie ändert sich die Fahrzeit vom Wildpark zur Mündung und zurück, wenn die Flussgeschwindigkeit niedriger ist? Begründe an einem Beispiel.

7. a) Ein Spielfeld besteht aus den vier Feldern A, B, C und D. Der Spielstein startet in A und wird entlang der Pfeile von einem Feld zum nächsten gezogen (oder kann - wie bei C - auf dem Feld belassen werden). Vom Feld A beispielsweise kann der Stein auf die Felder B oder C, nicht aber auf das Feld D gezogen werden. Auf jedem Feld entscheidet man sich mit der gleichen Wahrscheinlichkeit für einen der möglichen Pfeile.



      (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht der Spielstein nach zwei Zügen auf dem Feld D?

      (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht der Spielstein nach drei Zügen auf dem Feld B? Gib auch die möglichen Zugfolgen an.

      (3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann mit höchstens drei Zügen das Feld D erreicht werden? Gib auch die möglichen Zugfolgen an.

   b) Die vier Felder eines anderen Spielfeldes tragen die Bezeichnungen W, X, Y und Z. Ein Spielstein, der auf dem Feld X startet, steht nach zwei Zügen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ auf Z; ein Spielstein, der auf dem Feld W startet, steht nach zwei Zügen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ auf Y. Zeichne ein mögliches solches Spielfeld.

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

AUFGABENGRUPPE B **06.05.2008**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.
   (1) $(x+1)^2 = (x-2) \cdot (x+7)$ (2) $(3+x)^2 < x^2$
   b) (1) Löse diese Gleichung nach x auf: $\frac{x-2a}{3} = c$
   (2) Bestimme x für $a = 1$ und $c = 1$.
   (3) Bestimme a und c so, dass $x = 0$ und $a \neq c$ ist. Gib eine Möglichkeit an.
   (4) Bestimme a und c so, dass $x = 0$ ist; dabei soll $a = c$ sein.

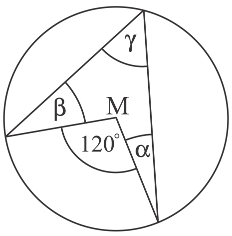
2. a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit: 1 cm) die Punkte $A(-2,5|-1,5)$, $B(3|-1,5)$ und $D(-1|2,5)$. Ergänze den Punkt C so, dass ein Parallelogramm $ABCD$ entsteht, und gib die Koordinaten von C an.
   b) Zeichne eine Gerade g durch die Punkte $P(-3|4,5)$ und B und spiegele das Parallelogramm an dieser Geraden. Nenne die Koordinaten der Bildpunkte A' und C'.
   c) Wie groß ist der Flächeninhalt des Sechsecks $AC'BCA'D$?
   d) Das in c) genannte Sechseck ist punktsymmetrisch. Notiere die Koordinaten des Spiegelzentrums Z.
   e) Wie groß ist die gemeinsame Fläche, die sowohl zum Parallelogramm $ABCD$ als auch zu seinem Bild nach der Spiegelung gehört?
   f) Ein anderes Parallelogramm ABC^*D^* und sein Bild nach der Spiegelung an der Geraden g (durch P und B) haben einen gemeinsamen Flächeninhalt von 9 cm^2. Die Punkte A, B und P sind unverändert, D^* liegt auf der Geraden g. Notiere für diesen Fall die Koordinaten der Punkte C^* und D^*.

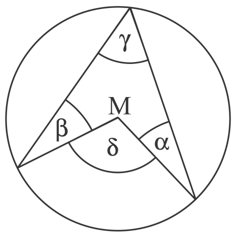
3. Bei dem Tagesausflug der Sportfreunde soll Berlin mit Hilfe öffentlicher Verkehrsmittel erkundet werden. Der Automat zeigt die nebenstehenden Möglichkeiten.

Einzelfahrausweis	2,10 €
Tageskarte	6,10 €
Kleingruppen-Tageskarte (bis 5 Personen)	15,40 €

   a) Ömer soll aus der Mannschaftskasse Tageskarten für alle 14 Jungen kaufen.
   (1) Welche Möglichkeiten hat er?
   (2) Wie viel könnte er sparen, wenn er statt der teuersten die günstigste Möglichkeit wählt? Gib den Unterschied in Euro und in Prozent (gerundet ohne Nachkommastellen) an.
   b) Vanessa kauft für eine Mädchengruppe Tageskarten. Sie hat die preisgünstigste Möglichkeit gewählt, bei der jedes Gruppenmitglied 3,85 € zahlen muss. Wie viele Mitglieder kann die Gruppe haben? Gib alle Möglichkeiten an und begründe deine Antwort.
   c) Eine andere Jugendgruppe findet, es müsste noch eine Gruppen-Tageskarte für bis zu 12 Personen geschaffen werden. Über den Preis dieser Karte entbrennt eine hitzige Diskussion. Wie sieht dein Vorschlag für den Preis einer 12er-Gruppenkarte aus? Begründe deinen Vorschlag!

4. a) (1) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $|AB| = c = 6,5$ cm, $|AC| = b = 5,5$ cm und $\gamma = \sphericalangle ACB = 85°$.
   (2) Konstruiere zum Dreieck ABC einen Punkt P so, dass das Parallelogramm $ABPC$ entsteht.
   b) Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis halb so lang wie ein Schenkel ist und dessen Umfang 17,5 cm beträgt.
   c) (1) Bestimme β, wenn $\alpha = 25°$ ist. (2) Bestimme δ, wenn $\alpha = \beta = 25°$ ist.





5. Bei Verbandstagungen haben Sportvereine entsprechend ihrer Mitgliederzahlen eine unterschiedliche Anzahl von Stimmen. Jeder Vereinsvertreter erhält eine Stimmkarte. Darauf steht die Anzahl der Stimmen für seinen Verein.

Kategorie	A	B	C	D
Anzahl der Vereinsmitglieder	< 100	100 - 250	251 - 500	> 500
Stimmen je Verein	1	2	3	4
Anzahl der Vereine im Verband	81	48	31	0

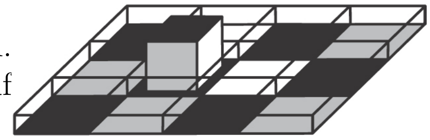
a) Bei einer Tagung waren 29 A- , 14 B- und 8 C-Vereinsvertreter anwesend.
   (1) Wie viele Stimmen konnten höchstens abgegeben werden?
   (2) Wie viel Prozent aller möglichen Stimmen sind vertreten?

b) Bei einer anderen Tagung des gleichen Verbandes sind genau 40 Vereinsvertreter anwesend.
   (1) Wie viele Stimmen können mindestens abgegeben werden?
   (2) Wie viele Stimmen können höchstens abgegeben werden?
   (3) Wie viel Prozent aller Vereine sind anwesend?

c) Zu einer weiteren Tagung des gleichen Verbandes sind Vereinsvertreter mit insgesamt 48 Stimmen anwesend. Wie viele Vereinsvertreter von B und C können anwesend sein, wenn 30 Vertreter der Kategorie A da sind? Notiere alle Möglichkeiten.

d) Wie viele Vereinsmitglieder hat der gesamte Verband höchstens?

6. Die Klasse 8Ra veranstaltet auf dem Schulfest ein Gewinnspiel. Dabei soll ein Würfel mit den Farben grau, schwarz und weiß auf das obige dreifarbige Plattenfeld geworfen werden. Man gewinnt, wenn die Farbe auf der Unterseite des Würfels mit der Farbe der Platte übereinstimmt. Das Ereignis „schwarze Platte, weißes Würfelfeld“ wird in der Form (s/w) notiert.



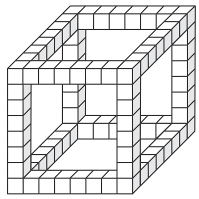
a) (1) Nenne alle Ereignisse, bei denen man nicht gewinnt!
   (2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine weiße Platte zu treffen? Gib auch die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Plattenfarben an!

b) Auf dem Würfel sind die Farben gleich verteilt.
   (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für den unwahrscheinlichsten Gewinn?
   (2) Verliert oder gewinnt man eher bei dem Spiel der 8Ra? Begründe durch Berechnung!

c) Die Klasse möchte erreichen, dass die Gewinne (w/w) und (s/s) gleich wahrscheinlich sind. Wie oft muss dann jede der Farben schwarz, weiß, grau auf dem Würfel vorhanden sein? Belege deine Entscheidung durch Berechnung!

d) Auf dem Würfel sind 4 Felder grau, ein Feld schwarz und ein Feld weiß. Wie viele Felder muss ein anderes Plattenfeld mindestens haben, damit die Gewinne (s/s), (g/g) und (w/w) gleich wahrscheinlich sind? Wie müssen die Felder dann gefärbt sein?

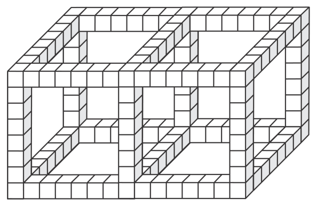
7. Die Kanten eines Würfelmodells sind jeweils aus 8 kleinen Holzwürfeln zusammengesetzt.



a) Aus wie vielen kleinen Würfeln bestehen die vier Kanten des Bodens?

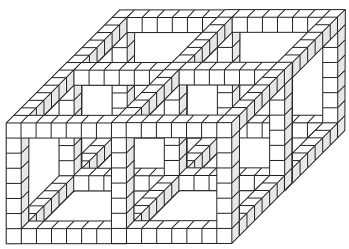
b) Aus wie vielen Würfeln besteht das abgebildete Kantenmodell?

Das jeweils nächste Modell entsteht durch „Anbau“ an das vorhergehende Modell unter Mitbenutzung der bestehenden Kanten (siehe Skizze).



c) (1) Wie viele Würfel braucht man insgesamt für das 2. Modell?
   (2) Wie viele Würfel braucht man insgesamt für das 4. Modell (in Reihe nebeneinander)?
   (3) Ein entsprechendes Modell besteht aus 548 Würfeln. Um das wievielte Modell handelt es sich?

d) Ein Vierermodell mit quadratischer Grundfläche besteht aus dem Grundwürfel und drei Erweiterungen. Wie viele kleine Würfel benötigt man?



MATHEMATIK-WETTBEWERB 2007/2008 DES LANDES HESSEN **3. RUNDE**

AUFGABENGRUPPE C **06.05.2008**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

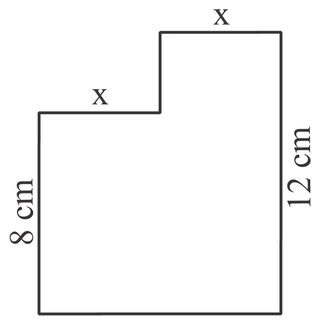
1. Berechne x.

   a) $18x - 3 \cdot (21 + 8x) = 42 + 21x - 51$

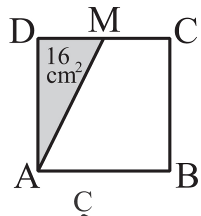
   b) $\frac{1}{2}x - \frac{4}{5} = 0,2$

   c) $5 \cdot (2x - 3) - (5 - x) - 4 \cdot (x + 2) = 0$

   d) Der Flächeninhalt der Figur beträgt 120 cm^2. Stelle eine Gleichung auf und berechne die Länge der Seite x.

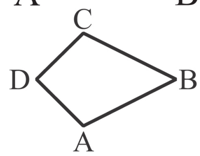


2.
   a) Berechne den Umfang des Quadrates $ABCD$. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$.



   b) Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ mit $a = |AB| = 6,5$ cm, $\alpha = 115°$ und dem Umfang $U = 21$ cm. Achte auf richtige Beschriftung.

   c) Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ (siehe nebenstehende Abbildung) mit $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 5$ cm und $|BD| = 7$ cm. Berechne den Flächeninhalt des Drachenvierecks. Achte auf richtige Beschriftung.



3. Paul und sein Vater streiten sich über das tägliche Duschen.

100 x Duschen (je 3 min)	kostet durchschnittlich 21,00 €
100 x Baden	kostet durchschnittlich 125,00 €

   a) Der Vater meint: „Ich bade nur einmal pro Woche zu Hause, das sind etwa 48-mal im Jahr, und du stehst an 365 Tagen unter der Dusche.“ Was ist nun teurer? Begründe durch Rechnung.

   b) Paul sagt: „Wenn ich beim Einseifen das Wasser abstelle, kann ich zusätzlich 30 % der Kosten sparen.“ Wie viel Euro kann er so pro Jahr beim Duschen sparen? Runde auf ganze Euro.

   c) Pauls Vater schafft einen neuen Duschkopf an: Jetzt fließen statt 30 Liter pro Minute nur noch 8 Liter pro Minute durch den Duschkopf. Wie viel Prozent Wasser spart man dabei (bei gleicher Duschzeit)? Runde auf ganze Prozent.

   d) Als Paul mit seiner Klasse in einem Jugendheim war und alle am Morgen duschen wollten, war das Wasser kalt, nachdem 24 Kinder geduscht hatten. Wie viele Kinder könnten (bei gleicher Duschzeit) mit derselben Menge Wasser warm duschen, wenn auch hier der Duschkopf statt 30 Liter/min nur 8 Liter/min Verbrauch hätte?

   e) Ein anderes Jugendheim richtet 20 Münzduschen für fünfminütiges Duschen ein. Es stehen 1,2 m^3 warmes Wasser zur Verfügung. Wie viel Liter warmes Wasser pro Minute dürfen maximal durch einen Duschkopf fließen, wenn 20 Schüler mit je einer Münze gleichzeitig duschen wollen?

4. Bis zum Ende des Schuljahres 2006/07 haben 75 Schüler die Gesamtschule Waldtal verlassen. Das sind 10 % der gesamten Schülerzahl. Im Zuge der Neueinschulung ist die Schülerzahl im Schuljahr 2007/08 wieder um 24 % angestiegen.

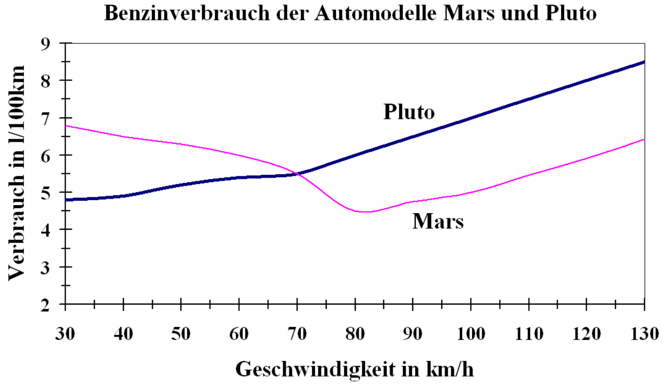
   a) Zeige: Die Gesamtschule Waldtal hatte nach der Neueinschulung 837 Schüler.

   b) Um wie viel Prozent ist die Schülerzahl im Schuljahr 2007/08 im Vergleich zum Vorjahr tatsächlich gestiegen? Runde auf ganze Prozent.

   c) Mit wie vielen Schülerinnen und Schülern muss die Schulleitung ungefähr rechnen, wenn im nächsten Jahr der Zuwachs 14 % beträgt?

   d) Laut der Schulleitung besucht im Schuljahr 2007/08 jedes dritte Kind den Hauptschulzweig. Davon sind zwei Drittel Jungen. Wie viele Mädchen sind im Hauptschulzweig?

5. In der folgenden Grafik ist der Benzinverbrauch der Automodelle Mars und Pluto dargestellt.



a) Wie hoch ist der Benzinverbrauch des Modells Mars bei 80 km/h?

b) Wie schnell fährt das Modell Pluto, wenn es auf 100 km 8 l verbraucht?

c) Peters Tante möchte ein Auto mit wenig Benzinverbrauch kaufen. Für welches Modell sollte sie sich entscheiden? Begründe deine Antwort ausführlich.

d) Peters Bruder fährt von Hamburg nach Berlin eine Strecke von 250 km mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von 100 km/h. Er fährt mit Modell Mars. Wie groß ist der Unterschied des gesamten Benzinverbrauchs im Vergleich zu Modell Pluto?

e) Peters Vater fährt über eine Strecke von 150 km mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von 100 km/h.

(1) Stelle die Fahrt in einem Diagramm dar. Wähle die x-Achse als Zeitachse mit 1 h $\hat{=}$ 3 cm und die y-Achse als Wegachse mit 50 km $\hat{=}$ 2 cm.

(2) Wie lange braucht er für die 150 km?

(3) Welche Strecke ist er bei gleichbleibender Geschwindigkeit in 72 Minuten gefahren?

6. a) Peter wirft beim Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiel einen (sechsseitigen) Würfel.

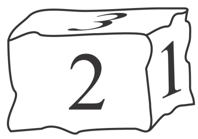
(1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Zahl 6 würfelt?

(2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei zweimaligem Würfeln, dass er zweimal die Zahl 3 würfelt?

(3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei zweimaligem Würfeln die Kombination 1 und 2 zu bekommen? (Die Reihenfolge ist beliebig.)

(4) Peter würfelt 100-mal hintereinander. Es fällt dabei fünfmal die Zahl 6. Jutta sagt darauf: „Das kann doch gar nicht sein.“ Was meinst du dazu?

b) Jutta wirft einen quaderförmigen Stein. Der Stein hat wie ein Würfel sechs Seitenflächen, auf dem die Zahlen 1 bis 6 verteilt sind. Sie notiert die Ergebnisse ihrer Würfe in der nebenstehenden Tabelle.



Zahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl	8	33	24	26	19	10

(1) In wie viel Prozent aller Fälle würfelt sie die Zahl 6?

(2) Peter sagt: „Diesen Würfel würde ich nicht beim Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiel nehmen.“ Warum? Erkläre!

(3) Schätze die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zahl 3 gewürfelt wird. Begründe kurz dein Ergebnis!

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

7. Bestimme bei jeder Aufgabe einen möglichen Wert für die fehlende Zahl.

a) $5 - \square = 1\frac{2}{7}$

b) $\square \cdot \square = 225$

c) $2 : \square = 8$

d) $\square + 34 = 26$

e) $\frac{1}{4} : \square = 4$

f) $48 - \square = 52$

g) $\frac{1}{5} \cdot \square = 1$

h) $\square \cdot \square \cdot \square = 64$

i) $\square \cdot \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$

j) $7 \cdot (\square - 4) = 105$

k) $5 \cdot \square + 34 = 7 \cdot \square$

l) $(\square + \square) \cdot \square = 128$