AUFGABENGRUPPE A **19.05.2009**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

   a) $(x+2)^2 \cdot (x^2-4) \cdot (x^2+9) \cdot (x^3+125) = 0$

   b) $(x+2)^2 \cdot (x^3+125) > 0$

   c) $(x+2)^2 \leq (x-2) \cdot (x+2)^3$

   d) $(x+2)^2 \cdot (x-3) \cdot (x^2-4) > 0$

2. a) Konstruiere ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ ($\overline{AB}||\overline{CD}$) mit $|AB| = 10$ cm und $|CD| = 7$ cm sowie $\overline{AC}$ senkrecht zu $\overline{BD}$.

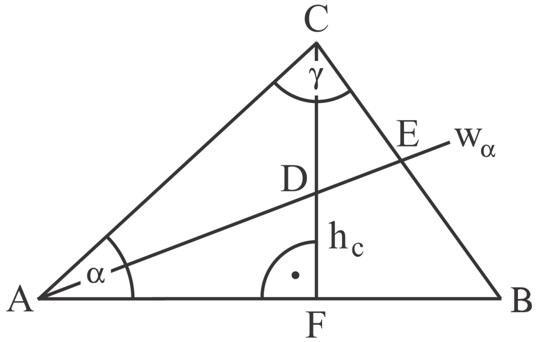
   b) Konstruiere den Umkreis des Trapezes $ABCD$.

   c) Auf welcher Linie liegen alle Punkte P, für die $\sphericalangle APB = 90°$ gilt? Zeichne sie auch ein.

   d) Ergänze mittels einer Konstruktion die Linie, auf der alle Punkte Q liegen, für die $\sphericalangle CQD = 70°$ gilt.

   e) Markiere einen Punkt R so, dass $\sphericalangle CRD = 70°$ und $\sphericalangle ARB = 90°$ gilt. Gib alle Möglichkeiten für R an.

3. Im Dreieck ABC schneidet die Winkelhalbierende w_α die Höhe h_c im Punkt D und die Seite $\overline{BC}$ im Punkt E. F ist der Fußpunkt der Höhe h_c (siehe nebenstehende Skizze).



   a) Es sei $\alpha = 40°$ und $\gamma = 90°$. Zeige: Die Seite $\overline{DE}$ ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks CDE.

   b) Es sei $\alpha = 40°$. Welchen Wert nimmt γ an, wenn

      (1) die Seite $\overline{CD}$ Basis

      (2) die Seite $\overline{CE}$ Basis

      eines gleichschenkligen Dreiecks CDE ist?

   c) Es sei α beliebig (aber $\alpha < 90°$). Welcher Zusammenhang besteht zwischen α und γ, wenn die Seite $\overline{CE}$ Basis eines gleichschenkligen Dreiecks CDE ist?

4. a) Addiert Onkel Erwin die Zehnerziffer und die Einerziffer seines Alters, so erhält er 12. Subtrahiert er von der Zehnerziffer die Einerziffer, so erhält er 4. Wie alt ist Onkel Erwin?

   b) Addiert Paul die beiden Ziffern seines Alters, so erhält er 8. Vertauscht er die beiden Ziffern seines Alters, so erhält er eine Zahl, die um 10 größer ist als das Doppelte seines Alters. Wie alt ist Paul?

   c) Christina und ihr Vater haben zufällig am gleichen Tag Geburtstag. Christina ist 14 Jahre alt, ihr Vater ist 41 Jahre alt. Das Alter ihres Vaters ergibt sich also aus ihrem eigenen Alter, wenn man die Ziffern vertauscht.

      (1) Wie alt werden Christina und ihr Vater sein, wenn sich ihr jeweiliges Alter beim nächsten Mal auf die gleiche Weise vergleichen lässt? Formuliere eine Regel für die nächsten Male.

      (2) Andreas und sein Vater haben ebenfalls am gleichen Tag Geburtstag. Andreas ist 38 Jahre alt, sein Vater ist 73. Begründe rechnerisch, dass sich das Alter von Andreas zu keinem Zeitpunkt durch Vertauschen von Ziffern aus dem Alter des Vaters bilden lässt.

5. Zahlen, die sich am Ende jeder ihrer Potenzen wiederfinden, heißen idempotent. Beispielsweise hat die Zahl **5** diese Eigenschaft, denn: $5^2 = 2\mathbf{5}$ $\quad 5^3 = 12\mathbf{5}$ $\quad 5^4 = 62\mathbf{5}$ usw.

   a) (1) Nenne alle einstelligen idempotenten Zahlen.

      (2) Bis zu welcher Potenz muss man dabei jede Zahl testen? Begründe.

   b) (1) Begründe: Für eine zweistellige idempotente Zahl x gilt die Gleichung $x^2 = 10^2 \cdot k + x$ mit $k \in \mathbb{N}$.

      (2) Zeige: Die Gleichung lässt sich *sinnvoll* auch so schreiben: $k = \frac{x}{25} \cdot \frac{x-1}{4}$ oder $k = \frac{x-1}{25} \cdot \frac{x}{4}$

      (3) Wie muss man x in dieser Gleichung wählen, damit sich für k eine natürliche Zahl ergibt? Bestimme so die beiden einzigen zweistelligen idempotenten Zahlen.

      (4) Stelle eine entsprechende Gleichung wie bei b) (2) (d. h. nach k *sinnvoll* aufgelöst) für dreistellige idempotente Zahlen auf.

6. Aus quaderförmigen Bauklötzchen soll ein Würfel zusammengesetzt werden.

   a) Jedes Klötzchen hat die Kantenlängen 1 cm, 2 cm und 3 cm.

      (1) Wie viele Klötzchen sind notwendig, um einen Würfel mit möglichst kleinem Volumen zusammenzusetzen?

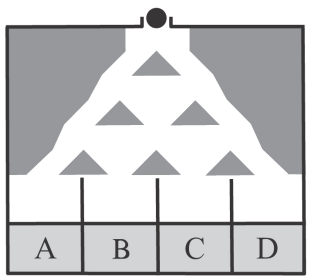
      (2) Ein Würfel hat die Kantenlänge 12 cm. Es werden 72 quaderförmige Klötzchen zum Bauen verwendet. Welche ganzzahligen Kantenlängen der Klötzchen (in cm) sind möglich? Gib zwei Möglichkeiten an.

   b) Es stehen nun zwei Sorten Bauklötzchen zur Verfügung: Typ A mit den Kantenlängen 1 cm, 4 cm und 5 cm bzw. Typ B mit den Kantenlängen 2 cm, 3 cm und 4 cm.

      (1) Es soll ein Würfel der Kantenlänge 12 cm zusammengesetzt werden; beide Klötzchentypen sollen dabei verwendet werden. Wie viele Klötzchen vom Typ A, wie viele Klötzchen vom Typ B werden benötigt? Gib eine Möglichkeit an und beschreibe, wie die Klötzchen dabei angeordnet werden.

      (2) Es wurden zwei gleich große Würfel zusammengesetzt. Ein Würfel besteht nur aus Klötzchen vom Typ A, der andere nur aus Klötzchen vom Typ B. Welche Kantenlänge können die Würfel haben? Gib eine mögliche Kantenlänge an.

7. a) Bei dem abgebildeten Galton-Brett fällt eine Kugel auf drei Reihen zugespitzter Holzklötzchen. An jedem Klötzchen fällt eine Kugel mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links oder rechts.



      (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet eine Kugel im Fach A?

      (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet eine Kugel im Fach B?

      (3) Nun fallen zwei Kugeln nacheinander durch das Galton-Brett. Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet mindestens eine Kugel im Fach A?

   b) Bei einem anderen Galton-Brett sind die Klötzchen unsymmetrisch zugespitzt. Dadurch fällt die Kugel mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,3 nach links (also in Richtung von Fach A). Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet die Kugel im Fach B?

   c) Nun wird wieder das abgebildete Galton-Brett verwendet (also gleiche Wahrscheinlichkeiten für links und rechts), aber die beiden Klötzchen in der mittleren Reihe werden durch unsymmetrische ersetzt. Die Wahrscheinlichkeit, mit der die Kugel an jedem dieser Klötzchen nach links fällt, ist unbekannt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von p=0,35 landet nun eine Kugel im Fach B. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt die Kugel an einem Klötzchen aus der mittleren Reihe nach links?

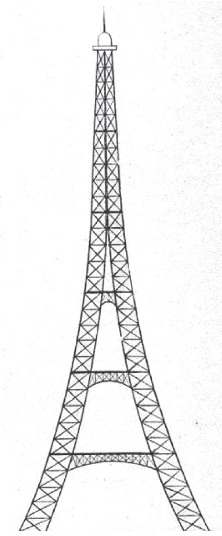
(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

AUFGABENGRUPPE B **19.05.2009**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.
   a) $\frac{2}{x} = 0,\overline{3}$
   b) $3 \cdot (2x+1) - 4 = (4x-1) \cdot (1-2x) + 8x^2$
   c) $(x+3)^2 \geq x^2 + 3$
   d) $4x = x^3$

2. Aus einem Lexikon zum Suchbegriff „Eiffelturm“:
   Technische Daten: Höhe 325 m; Seitenlänge der (quadratischen) Grundfläche: 125 m; Aussichtsplattformen in 57 m, 115 m und 276 m Höhe; Masse 7020 t (Tonnen); Baumaterial Stahl (Dichte: 7,8 g/cm^3 = 7,8 kg/dm^3 = 7,8 t/m^3)



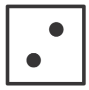
   a) Bestimme das Volumen des verbauten Stahls.
   b) Ein maßstäblich verkleinertes Modell hat eine Höhe von 65 cm.
      (1) In welcher Höhe befindet sich (bei diesem Modell) die zweite Aussichtsplattform?
      (2) Berechne den Flächeninhalt der quadratischen Grundfläche des Modells.
   c) Bei einem anderen maßstäblich verkleinerten Modell des Eiffelturms hat die Grundfläche einen Flächeninhalt von 100 cm^2.
      (1) In welchem Maßstab ist dieses Modell konstruiert?
      (2) Welche Höhe hat dieses Modell?
      (3) Wie viel cm^3 Stahl benötigt man für dieses Modell?

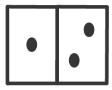
3. a) Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ mit $a = |AB| = 5$ cm, $b = |BC| = 7$ cm und $h_a = 5$ cm. Zeichne beide Möglichkeiten.
   b) Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ mit $a = |AB| = 5$ cm und $b = |BC| = 7$ cm, bei dem die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AB}$ durch den Punkt D geht.
   c) Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ mit $a = |AB| = 5$ cm und $b = |BC| = 7$ cm, bei dem die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AB}$ durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$ geht.
   d) Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ mit $a = |AB| = 5$ cm und $b = |BC| = 7$ cm, bei dem die Mittelsenkrechten der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ einen Abstand von 2 cm haben.

4. Zur Ankurbelung des Automarktes wurde zu Jahresbeginn für Autos, die 9 Jahre und älter sind, beim Kauf eines Neu- bzw. Jahreswagens eine Abwrackprämie (AWP) in Höhe von 2500 € eingeführt. Hierfür stellte die Bundesregierung ursprünglich 1,5 Mrd. € zur Verfügung.
   a) Für wie viele Autos kann die AWP gewährt werden?
   b) Wie hoch ist bei einem Neufahrzeug (Wert 12 500 €) die prozentuale Ersparnis durch die AWP?
   c) Die prozentuale Ersparnis bei einem Jahreswagen entspricht 12,5 %, wenn die AWP gewährt wird. Wie viel kostet das Fahrzeug ohne Anrechnung der AWP?
   d) Die prozentuale Ersparnis für einen 40 000 € teuren Neuwagen soll insgesamt bei 20 % liegen. Wie viel Euro Preisnachlass muss ein Händler zusätzlich zur AWP gewähren?
   e) Ein Autohaus überlässt seinen Kunden die Entscheidung, ob zunächst ein 25-prozentiger Preisnachlass und danach die Abwrackprämie gewährt wird oder umgekehrt (zuerst AWP, dann 25 % Nachlass auf den Restbetrag). Was meinst Du dazu?

5. In einem Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 cm) sind die Punkte $A(1|1)$, $B(6|1)$ und $D(1|5)$ gegeben.
   a) Bestimme die x-Koordinate des Punktes $C(x|5)$ so, dass das Trapez $ABCD$ einen Flächeninhalt von 16 cm^2 hat. Zeichne dieses Trapez.
   b) M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Berechne die Flächeninhalte der Dreiecke AMD, DMC und MBC.
   c) N ist ein beliebiger Punkt auf der Seite $\overline{AB}$.
      (1) Warum können die Dreiecke AND, DNC und NBC nicht alle den gleichen Flächeninhalt haben?
      (2) Die Dreiecke AND, DNC und NBC sollen nun alle flächengleich sein. Dazu dürfen die Punkte A und B parallel zur x-Achse verschoben werden. Gib die Koordinaten der Punkte
      (2.1) B und N an, wenn nur B verschoben wird.
      (2.2) A und B an, wenn $N(-0,5|1)$.

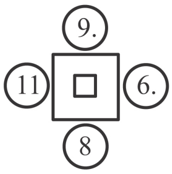
6. Man kann einen Würfel so anschauen, dass man genau eine, zwei oder drei Flächen sieht (siehe nebenstehende Abbildung).

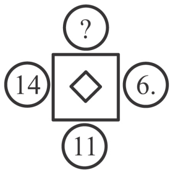

eine Ansichtsfläche


zwei Ansichtsflächen, Augensumme 3


drei Ansichtsflächen, Augensumme 10


drei Ansichtsflächen, Augensumme 9

   a) (1) Betrachtet man nun zwei Flächen gleichzeitig und addiert deren Augenzahlen, so sind fast alle Augensummen von 3 bis 11 möglich. Welche Augensumme zwischen 3 und 11 lässt sich nicht bilden? Begründe!
      (2) Man betrachtet nun drei Flächen gleichzeitig. Welches ist die größtmögliche bzw. kleinstmögliche Augensumme? Welche der dazwischen liegenden Augensummen sind hierbei nicht möglich?
   b) 

      (1) Vier Spieler sitzen um einen Tisch. Auf dem Tisch liegt ein großer Würfel. Jeder Spieler sieht genau zwei Flächen des Würfels, die obere und die ihm zugewandte. Die im Kreis stehende Zahl ist die für den jeweiligen Spieler sichtbare Augensumme. Welche Zahl ist für keinen der Spieler sichtbar?
      (2) Welche Augensummen sehen die vier Spieler, wenn die 1 oben liegt?
   c) 

      Der Würfel liegt jetzt so, dass jeder Spieler drei Flächen erkennen kann. Welche Augensumme sieht der vierte Spieler?

7. Die Anna-Otto-Schule veranstaltet zur 100-Jahr-Feier ein Glücksspiel. Dazu wird eine Urne mit vier Kugeln (wie im Bild unten dargestellt) verwendet. Man zieht achtmal, nach jedem Ziehen wird der Buchstabe notiert und die Kugel zurückgelegt. Die Buchstabenfolge ergibt sich durch die Reihenfolge der gezogenen Kugeln.

1.Kugel	2.Kugel	3.Kugel	4.Kugel	5.Kugel	6.Kugel	7.Kugel	8.Kugel
A	N	O	T	T	A	A	N

Einsatz zurück: die 8. Kugel ist ein A
Trostpreis: die ersten vier hintereinander notierten Buchstaben bilden den Namen OTTO
Hauptpreis: der Name ANNA OTTO entsteht

   a) (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es den Einsatz zurück?
      (2) Notiere eine Buchstabenfolge, bei der man einen Trostpreis gewinnt.
      (3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Trostpreis zu gewinnen?
      (4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Hauptpreis zu gewinnen?
   b) Man denkt darüber nach, zwei Urnen zu nehmen. In der ersten sollen zwei Kugeln mit den Buchstaben A und N, in der zweiten Urne zwei Kugeln mit den Buchstaben O und T liegen. Man soll zuerst viermal aus Urne 1, dann viermal aus Urne 2 ziehen. Wie groß sind in diesem Fall die Wahrscheinlichkeiten für „Einsatz zurück“, „Trostpreis“ und „Hauptpreis“?

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

AUFGABENGRUPPE C **19.05.2009**

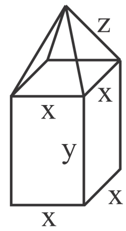
Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Löse die Gleichungen

   (1) $2,5 + 14x = -3,1$

   (2) $22 - 2 \cdot (4 - x) = (7 - 3x) \cdot (-10)$

   (3) $\frac{1}{2} \cdot (x - 36) = \frac{3}{4} \cdot x + 30$



   b) (1) Stelle die Summe aller Kantenlängen des Körpers als Term dar.

   (2) Berechne den Wert des Terms für x = 2,5 cm, y = 6 cm und z = 3 cm.

2. Das Sportgeschäft „Irenes Sportladen“ führt einen Sonderverkauf durch und gibt auf alle Artikel 35 % Rabatt.

   a) Antonia spart beim Kauf von Joggingschuhen 33,60 €. Berechne den ursprünglichen Preis.

   b) Peter muss für einen Hometrainer nur noch 291,85 € bezahlen. Wie teuer war der Hometrainer vorher?

   c) Ein Mountainbike kostete ursprünglich 1200 €. Der Preis wurde zuerst um 35 % gesenkt. Weil es nicht verkauft werden konnte, wurde der reduzierte Preis noch einmal um 10 % gesenkt.

   (1) Wie teuer ist das Mountainbike nach der zweiten Preissenkung?

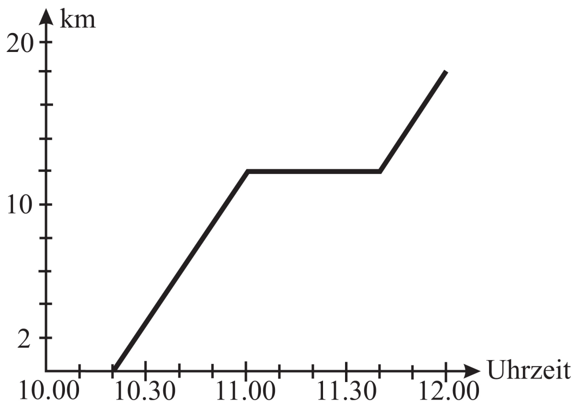
   (2) Um wie viel Prozent wurde das Mountainbike insgesamt preiswerter?

3. a) Die Klasse 9a macht eine Radtour von ihrer Schule zum Waldsee. Dazu werden zwei Gruppen gebildet. Das Diagramm zeigt den Verlauf der Tour von Gruppe A.

   (1) Wie lange braucht die Gruppe von der Schule bis zum Waldsee?

   (2) Wie viel Kilometer ist die Gruppe bis zum Waldsee gefahren?

   (3) Beschreibe den Verlauf der Radtour (Fahrzeit, Entfernung).



   b) Gruppe B startet bereits um 10 Uhr und macht nach 30 Minuten an einem Eiscafe, das 6 km von der Schule entfernt ist, eine Pause von 20 Minuten. Nach weiteren 6 km und einer halben Stunde Fahrt macht sie eine zweite Pause von 10 Minuten. Sie kommt gleichzeitig mit Gruppe A am Waldsee an.

   (1) Zeichne das dazugehörige Weg-Zeit-Diagramm auf dein Reinschriftpapier mit der gleichen Achseneinteilung wie in Aufgabe a).

   (2) Eine Begleitperson aus Gruppe B muss dringend zurück zur Schule. Sie fährt um 12.15 Uhr ohne Pause zurück mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 15 km/h. Um wie viel Uhr ist sie wieder in der Schule?

   c) Um wie viel Uhr trifft Gruppe A auf Gruppe B? Wie viel km hat Gruppe A bis dahin zurückgelegt?

4. a) Zeichne das Viereck $ABCD$ mit $A(3|2)$, $B(5|1)$, $C(8|3)$ und $D(6|5)$ in ein Koordinatensystem (1 Einheit entspricht 1 cm).

   b) Der Punkt $A'(1|2)$ ist durch eine Achsenspiegelung entstanden. Zeichne die Spiegelachse s ein.

   c) Spiegele das Viereck $ABCD$ an der Achse s. Gib die Koordinaten der Bildpunkte B', C' und D' an.

   d) Berechne den Flächeninhalt des Sechsecks $B'BCDD'C'$.

5. a) Frau Jost notiert sich bei jedem Tanken die Literzahl und die zurückgelegte Strecke:

Strecke 1:	32,8 l	400 km
Strecke 2:	39,5 l	500 km
Strecke 3:	46,2 l	550 km

Auf welcher Strecke hat das Auto von Frau Jost am wenigsten pro 100 km verbraucht?

b) Sohn Axel fährt von Kassel nach Frankfurt (190 km) und zurück.

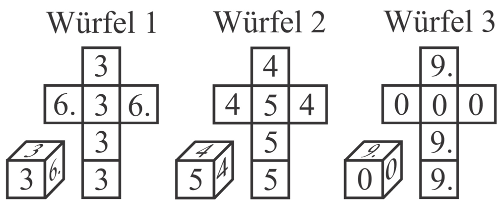
(1) Für die Hinfahrt braucht er 152 Minuten. Gib die Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h an.

(2) Er tritt um 22.15 Uhr die Rückfahrt an und kann jetzt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h fahren. Wie viele Minuten dauert die Rückfahrt?

(3) Er hat pro 100 km durchschnittlich 8,4 l verbraucht. Wie viel Benzingeld muss er seiner Mutter geben, wenn das Benzin 1,20 €/l kostet? Runde auf ganze Cent.

c) Herr Jost füllt den Tank (42 l) seines Oldtimers randvoll und fährt los. Nach 315 km ist der Tank leer. Er füllt das Benzin aus dem Reservekanister (5 l) in den Tank und fährt weiter. Bis zur nächsten Tankstelle sind es noch genau 40 km. Kommt er mit diesen 5 Litern bis zur Tankstelle? Begründe deine Antwort durch Rechnung.

6. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit Würfel 1 eine 6 zu würfeln?



b) Mit einem der drei abgebildeten Würfel ist 1200-mal gewürfelt worden. 809-mal war das Ergebnis eine Zahl kleiner als 4. Welcher Würfel wird das gewesen sein? Begründe deine Antwort.

c) Anna und Bahar spielen mit den Würfeln. Folgende Spielregeln werden vereinbart:

- Der erste Spieler wählt einen der drei Würfel.
- Der zweite Spieler wählt einen anderen Würfel.
- Das Spiel gewinnt derjenige, der die größere Zahl würfelt.

Anna wählt Würfel 1. Welchen Würfel sollte Bahar wählen? Begründe deine Antwort durch Rechnung.

d) Würfel 2 und Würfel 3 werden gleichzeitig geworfen. Aus den Augenzahlen wird die Summe gebildet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Summe 4 zu erhalten?

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

7. Für verschiedene Zahlenschlösser sind unterschiedliche Zahlenkombinationen und ein Code A und B angegeben.
A gibt an, wie viele Ziffern richtig sind und bereits an der richtigen Stelle stehen.
B gibt an, wie viele Ziffern richtig sind, aber an der falschen Stelle stehen.

Beispiel:
Die Zahlenkombination eines Schlosses ist 234. Nebenstehende Einstellungen wurden ausprobiert, und zwar mit dem rechts aufgeführten Ergebnis für A und B.

Schloss	A	B
259	1	0
318	0	1
432	1	2
975	0	0

Notiere für jedes Schloss eine richtige Kombination:

(1)

Schloss 1	A	B
256	0	0
542	1	0
764	1	1
359	1	0

(2)

Schloss 2	A	B
367	0	0
695	1	1
922	0	1
694	2	0

(3)

Schloss 3	A	B
4689	0	2
8443	1	1
2647	0	0
7625	1	0
8395	2	2

(4)

Schloss 4	A	B
2471	1	2
9356	0	0
3685	1	0
4978	1	2
4728	2	1