

AUFGABENGRUPPE A

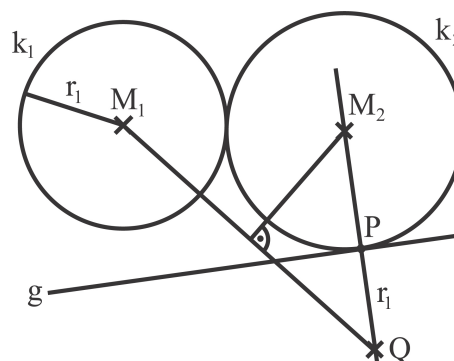
15.05.2012

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$. Notiere auch deinen Lösungsweg (durch Rechnung oder in Worten).

- a) $3x - x^2 \geq 0$
- b) $-x \cdot (3 - x) \cdot (3 + x)^2 > 0$
- c) $(x^2 + 2x) \cdot (x - 5) \geq 0$

2. a) Zeichne zwei Kreise k_1 mit $r_1 = 4$ cm und k_2 mit $r_2 = 3$ cm, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 den Abstand 7 cm haben. Konstruiere einen Kreis k_3 mit $r_3 = 2$ cm (und M_3 außerhalb von k_1 und k_2), der k_1 und k_2 berührt.
- b) Zeichne zwei Kreise k_1 mit $r_1 = 5$ cm und k_2 mit $r_2 = 3$ cm, deren Mittelpunkt M_1 und M_2 den Abstand 2 cm haben. Konstruiere einen Kreis k_3 mit $r_3 = 1,5$ cm, der k_1 und k_2 berührt und innerhalb von k_1 , aber nicht innerhalb von k_2 liegt.
- c) Zeichne einen Kreis k_1 mit Radius $r_1 = 3$ cm und eine Gerade g , die zu k_1 einen Abstand von 1,5 cm hat. Konstruiere einen Kreis k_2 mit $r_2 = 2$ cm, der k_1 berührt und g als Tangente besitzt.
- d) Bei der nebenstehenden Konstruktion sind der Kreis k_1 , die Gerade g , sowie der Punkt P auf g vorgegeben. Der Kreis k_2 soll sowohl g (im Punkt P) als auch k_1 berühren. Beschreibe, wie k_2 konstruiert wurde.



3. a) Zeichne ein Dreieck ABC mit dem Umkreisradius $r_u = 5,5$ cm, $|BC| = a = 7$ cm und $\gamma = 75^\circ$.
- b) P ist ein beliebiger Punkt auf dem Kreisbogen von A nach C . F ist der Fußpunkt des Lots von P auf $\overline{AB}$, D ist der Fußpunkt des Lots von P auf $\overline{BC}$ (oder ggf. deren Verlängerung) und E ist der Fußpunkt des Lots von P auf $\overline{CA}$. Begründe:
- (1) Die Vierecke $ECDP$, $FBDP$ und $EPAF$ sind Sehnenvierecke.
 - (2) $\sphericalangle APC = \sphericalangle FPD = 180^\circ - \beta$
 - (3) $\sphericalangle CPD = \sphericalangle CED$ und $\sphericalangle APF = \sphericalangle AEF$
 - (4) E liegt auf der Strecke $\overline{DF}$.
4. Eine Konditorei produziert rote Kirschtrüffel, braune Schokotrüffel und weiße Vanilletrüffel.
- a) In einer Packung sind 45 % der Trüffel rot. Es gibt 12 braune und 10 weiße Trüffel.
- (1) Bestimme, wie viele Trüffel in der Packung sind.
 - (2) Bestimme, wie viele rote Trüffel aus der Packung genommen werden müssten, damit der Anteil der braunen Trüffel dann ein Drittel beträgt.
 - (3) Der Anteil der braunen Trüffel an der Gesamtzahl aus a) (1) soll nur noch ein Drittel so groß sein wie zuvor. Dazu können beliebig viele Trüffel hineingelegt oder herausgenommen werden. Beschreibe zwei verschiedene Möglichkeiten.
- b) In einer anderen Packung sind 36 % der Trüffel rot. 19 Trüffel sind braun. Es gibt zwei weiße Trüffel mehr als rote. Bestimme die Anzahl der roten Trüffel.
- c) In einer weiteren Packung sind 40 % der Trüffel rot. Es gibt 12 braune Trüffel weniger als rote. Es gibt mehr weiße Trüffel als rote. Bestimme zwei Lösungen.

5. Eine vorgegebene Zahl wird in mindestens zwei positive ganzzahlige Summanden zerlegt. Anschließend wird das Produkt dieser Summanden gebildet. Beispielsweise lässt sich die Zahl 7 auf viele Arten zerlegen, z. B.:

(1) $7 = 1 + 2 + 4$ Produkt: $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$

(2) $7 = 1 + 1 + 2 + 3$ Produkt: $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

- a) Gib für die Zahl 5 alle möglichen Werte für das Produkt an.
 b) Bestimme den größten Wert des Produktes positiver ganzer Zahlen, deren Summe

- (1) 12
 (2) 21
 (3) 25 ist.

(Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt oder Potenz angegeben werden.)

- c) Wie sollte man bei größeren Zahlen vorgehen, um den größten Wert des Produktes zu finden? Formuliere eine Strategie und begründe sie.

6. a) Das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n wird n *Fakultät* genannt und mit $n!$ bezeichnet: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

- (1) Berechne: $6!$
 (2) Begründe (rechnerisch oder mit Worten): $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$
 (3) Berechne: $\frac{31!}{29!}$

- b) Für den folgenden Quotienten aus Fakultäten $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ schreibt man kurz: $\binom{n}{k}$ (gesprochen: n über k)

(1) Berechne: $\binom{31}{29}$

(2) Berechne $\frac{\binom{17}{3}}{\binom{16}{2}}$, gib eine allgemeine Formel für $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}}$ an und zeige diese.

(3) Zeige: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

7. a) Beim Basketball hat Gerhard bei Freiwürfen eine Trefferwahrscheinlichkeit von 60 %.

- (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er zwei Freiwürfe hintereinander?
 (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von zwei Freiwürfen genau einen?
 (3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit verwandelt er von drei Freiwürfen höchstens zwei?

- b) Eine Basketballwurfmaschine hat eine doppelt so große Trefferwahrscheinlichkeit wie Patrick. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide treffen, beträgt 0,5. Bestimme Patricks Trefferwahrscheinlichkeit.

- c) Christina und Rolf werfen jeweils einen Freiwurf. Christina hat eine n -mal so große Trefferwahrscheinlichkeit wie Rolf. Ermittle die maximal mögliche Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide treffen. Begründe deine Rechnung.

(Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.)

AUFGABENGRUPPE B

15.05.2012

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$.
 - a) $x^2 + 2 \cdot (0,5x - 1) = (x + 1)^2$
 - b) $(5x - 2) \cdot (-2x + 5) \geq (3x + 1)^2 - 19 \cdot (x^2 + 3)$
 - c) $x + x^2 = 0$
 - d) $\left(\frac{-2}{x}\right)^2 > 1$

2. Die anhaltende Trockenheit und der dann folgende Regen haben die Heuernte 2011 erschwert. So war das Heu deutlich teurer als im Vorjahr. In Hessen hat man 2011 bei einem Gesamtertrag von 1,98 Mio. Tonnen Heu durchschnittlich 6600 kg pro Hektar ernten können. Das sind 4 % weniger als im Vorjahr, womit Hessen im deutschlandweiten Vergleich noch recht gut dasteht.
 - a) Wie viel Hektar Grünfläche standen 2011 für die Heuernte zur Verfügung?
 - b) Im deutschlandweiten Mittel war der Heuertrag pro Hektar im Jahr 2011 um 6 % geringer als in Hessen. Wie viel kg Heu wurden pro Hektar in 2011 deutschlandweit im Durchschnitt geerntet?
 - c) Wie viel kg Heu wurde 2010 hessenweit pro Hektar geerntet?
 - d) Im Jahr 2010 haben 100 kg Heu in kleinen Ballen 18 € gekostet. Im Jahr 2011 kostete die gleiche Menge 30 €.
 - (1) Wie viel Prozent teurer war das Heu in 2011?
 - (2) Wie viel Prozent günstiger war das Heu in 2010?

3. Es sollen Vielecke gezeichnet werden, bei denen mindestens eine Diagonale 6 cm lang ist. Konstruiere jeweils ein:
 - a) Quadrat
 - b) Rechteck, welches kein Quadrat ist
 - c) Parallelogramm, welches kein Rechteck ist
 - d) gleichschenkliges Trapez, welches kein Parallelogramm ist
 - e) regelmäßiges Fünfeck
 - f) regelmäßiges Sechseck mit 6 cm als der Länge der längsten Diagonale

4.
 - a)
 - (1) Marc, der in seiner Freizeit gerne rechnet, behauptet: Wenn man eine Seite eines Quadrates um 3 cm verlängert und die andere Seite um 3 cm verkürzt, dann ist der Flächeninhalt des Rechtecks um 9 cm² kleiner als der des Quadrates. Gib ein Beispiel an, bei dem er Recht hat!
 - (2) Welche Seitenlängen müsste ein Quadrat haben, damit Marcs Behauptung nicht mehr gilt?
 - (3) Wie verändert sich der Flächeninhalt eines anderen Quadrates, wenn man eine Seite um 5 cm verlängert und die andere um 5 cm verkürzt? Begründe mithilfe einer Rechnung!
 - (4) Welche Regelmäßigkeit in der Beziehung zwischen den Flächeninhalten von Quadrat und Rechteck erkennst du? Beschreibe!
 - b)
 - (1) Gib eine allgemeine Formel an, die beschreibt, wie sich der Flächeninhalt x^2 eines Quadrates verändert, wenn man eine Seite um n cm verlängert und die andere Seite um n cm verkürzt.
 - (2) Wie groß muss die Seitenlänge x des Quadrates mindestens sein, damit die Formel für die oben genannte Beziehung zwischen den Flächeninhalten anwendbar ist?

5. Gegeben ist ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm sowie ein Kreis mit den Mittelpunktkoordinaten $M(0|0)$ und dem Radius $r = 4$ cm.

- a) Zeichne das Koordinatensystem mit dem Kreis.
- b) Ein Dreieck hat die Eckpunkte $(-4|0)$ und $(4|0)$. Der dritte Punkt liegt ebenfalls auf dem Kreis.

(1) Der dritte Punkt hat die Koordinaten $(x|3)$.

(1.1) Zeichne alle möglichen Dreiecke ein.

(1.2) Berechne den Flächeninhalt eines solchen Dreiecks.

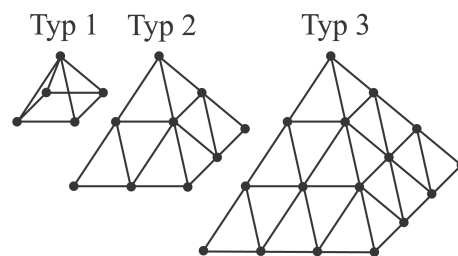
(2) Es gibt weitere Dreiecke mit demselben Flächeninhalt wie in (1.2). Gib die y -Koordinate eines anderen dritten Punktes als bei b)(1) an.

(3) Gib die Koordinaten eines dritten Punktes an, sodass der größtmögliche Flächeninhalt entsteht. Gib alle Möglichkeiten an.

c) (1) Die Schnittpunkte des Kreises mit den Koordinatenachsen sollen die Eckpunkte eines Quadrates sein. Bestimme den Flächeninhalt des Quadrates.

(2) In einer entsprechenden Figur hat das Quadrat einen Flächeninhalt von 98 cm^2 . Wie groß ist der Durchmesser des Ausgangskreises?

6. Die nebenstehenden Klettergerüste sind (quadratische) Pyramiden. Sie bestehen jeweils aus vier mit Kugeln und gleichlangen Stäben gebauten Dreiecksflächen. Von Typ 2 und 3 siehst du aus Gründen der Übersichtlichkeit in der Abbildung nur die vordere und die rechte Fläche.



a) Typ 2 soll gebaut werden.

(1) Wie viele Kugeln werden benötigt?

(2) Wie viel Stäbe werden verbaut?

b) Typ 2 soll zu Typ 3 erweitert werden. Wie viele Kugeln und Stäbe werden zusätzlich benötigt?

c) Bei der Herstellung eines Klettergerüsts werden 61 Kugeln verbaut.

(1) Um welchen Typ handelt es sich?

(2) Wie viele Stäbe werden verbaut?

7. In einem Bonbonglas sind Bonbons mit drei verschiedenen Geschmacksrichtungen. Die Bonbons sehen alle gleich aus.

(Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.)

a) Der Hersteller befüllt jedes Glas mit 20 Himbeer-, 30 Zitronen- und 50 Eukalyptus-Bonbons. Henry nimmt Bonbons aus einem vollen Glas heraus.

(1) Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass das erste Bonbon Zitronengeschmack hat.

(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das erste ein Himbeerbombon und das zweite ein Eukalyptusbombon?

(3) Die ersten beiden Bonbons sollen Himbeergeschmack haben. Gib die Wahrscheinlichkeit an.

(4) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben drei entnommene Bonbons den gleichen Geschmack?

b) Der Hersteller befüllt das Glas nur noch mit 50 Bonbons. Jede Geschmacksrichtung soll vorhanden sein.

(1) Die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen des ersten Bonbons ein Himbeerbombon zu erhalten, soll größer als ein Fünftel, aber geringer als 30 % sein. Wie kann der Hersteller das Glas befüllen? Gib zwei Möglichkeiten an!

(2) Paula mag keine Eukalyptusbombons. Daher hofft sie, dass die Wahrscheinlichkeit, ein solches zu ziehen, geringer ist als $\frac{2}{100}$. Beurteile!

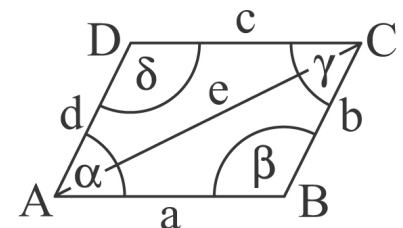
AUFGABENGRUPPE C

15.05.2012

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Berechne x .
 - (1) $8x + 2 - 5x = 12 - 3x + 14$
 - (2) $1,5x - 1 = -4,5 + 0,2 \cdot (4 + 3x)$
 - (3) $10 - 3 \cdot (x - 8) - 15x + 40 = 3x + 20 - 18x$
- b) Stelle eine Gleichung auf (du musst sie nicht lösen):
 In einer Tüte befinden sich 53 Kaubonbons mit 3 unterschiedlichen Geschmacksrichtungen. Es sind doppelt so viele Orangenbonbons wie Zitronenbonbons und 3 weniger mit Erdbeergeschmack als Zitronenbonbons.
2. Auf dem Wochenmarkt findet man verschiedene Angebote:
 - a) Händler Isenberg bietet ein 3 kg-Netz Orangen für 4,89 € an. Händler Cetin verkauft Kisten mit 8 kg Orangen für 12,80 €. Berechne, welches Angebot günstiger ist (bezogen auf den Kilopreis).
 - b) Bäcker Huber hat 50 Tüten mit jeweils 6 Brötchen gepackt. Berechne die Anzahl der Tüten, die er für die gleiche Menge Brötchen braucht, wenn er immer nur 4 Brötchen in eine Tüte packt.
 - c) Händler Stravridis bezahlt im Großmarkt für 25 kg Weintrauben 30 €. Er verlangt auf dem Wochenmarkt 60 % mehr für seine Trauben. Berechne den Preis für ein Kilogramm Trauben auf dem Wochenmarkt.
 - d) Händlerin Muth bietet Erdbeeren für 2 € pro Schale an. Ab 12 Uhr verkauft sie die Schale Erdbeeren 20 % günstiger. Ab 15 Uhr ermäßigt sie den Preis der Schale Erdbeeren erneut um 25 %. Um wie viel Prozent wurde der ursprüngliche Preis insgesamt gesenkt? Begründe deine Entscheidung.
 - (1) 40 % (2) 45 % (3) 55 % (4) 60 %

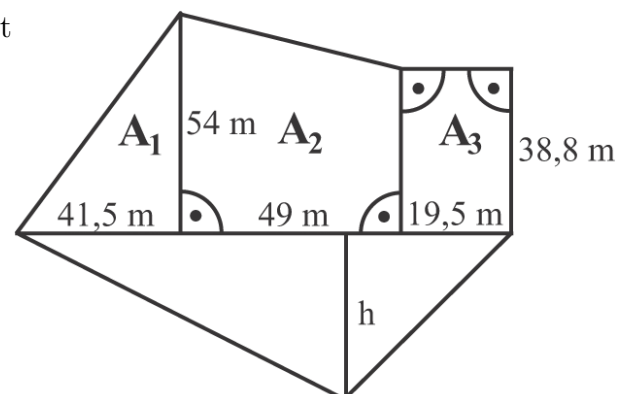
3. a) Im Parallelogramm $ABCD$ ist $\alpha = 68^\circ$. Berechne die Winkel β und δ .



- b) Von einem anderen Parallelogramm $ABCD$ ist folgendes gegeben: Grundseite $a = 7$ cm, Höhe $h_a = 4,5$ cm, Winkel $\alpha = 110^\circ$.
 - (1) Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.
 - (2) Zeichne das Parallelogramm $ABCD$ und beschrifte die Eckpunkte.
- c) Konstruiere ein weiteres Parallelogramm $ABCD$ mit $b = 2,5$ cm, $e = 4,7$ cm und $\beta = 98^\circ$. Beschrifte die Eckpunkte.

4. Die abgebildete Figur hat einen Gesamtflächeninhalt von $A = 7725,7 \text{ m}^2$.

- a) Berechne die Größen der Teilflächen A_1 , A_2 , A_3 .
- b) Berechne die Höhe h des unteren Dreiecks.



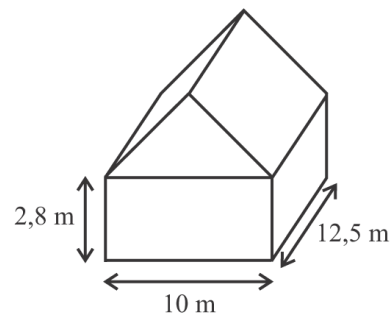
5. Lilli möchte sich ein neues Fahrrad kaufen. Sie vergleicht zwei Angebote für das gleiche Fahrrad. Bei *Radgut* muss sie 874 € bezahlen. 3 % Skonto kann sie noch abziehen. Bei *Fahrschnell* spart sie durch 3 % Skonto 25,80 € ein. Ihre Freundin Maria empfiehlt ihr, das Fahrrad bei *Radgut* zu kaufen, da sie dort im Jahr zuvor das gleiche Fahrrad für 920 € gekauft hat.

- a) Berechne den jeweiligen aktuellen Preis für das Fahrrad bei Barzahlung.
- b) Berechne, um wie viel Prozent der Preis des Fahrrades bei *Radgut* im Vergleich zum Vorjahr ohne Berücksichtigung des Skontos gesunken ist.

6. a) Die nebenstehende Skizze zeigt das Einfamilienhauses der Familie Müller. Beim Erdgeschoss entspricht der umbaute Raum dem Volumen.

- (1) Der umbaute Raum des Dachgeschosses entspricht der Hälfte desjenigen des Erdgeschosses. Berechne den umbauten Raum des gesamten Hauses.

- (2) Berechne die Kosten für den Bau des Einfamilienhauses, wenn 1 m^3 umbauten Raumes 280 € kostet.



- b) Bei Familie Schmidt hat der Architekt einen Kostenvoranschlag für den umbauten Raum über 243 000 € gemacht. 1 m^3 des umbauten Raumes kostet hier jetzt nur 270 €. Das Haus besteht ebenfalls aus einem Erd- und Dachgeschoss. Ein Drittel der veranschlagten Kosten werden für das Dachgeschoss verwendet. Die Höhe des Erdgeschosses beträgt bei Familie Schmidt 3 m. Berechne die Größe der Grundfläche des Hauses.

7. a) Bei einem 6-seitigen Farbwürfel sind die Flächen verschieden gefärbt: Zwei Flächen sind rot, zwei Flächen sind blau, eine Fläche ist gelb und eine Fläche ist grün.

- (1) Anton würfelt einmal. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse.

(1.1) Er würfelt gelb.

(1.2) Er würfelt rot.

- (2) Michelle würfelt zweimal hintereinander. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse.

(2.1) Sie würfelt zweimal blau.

(2.2) Sie würfelt zuerst rot, dann grün oder umgekehrt.

- b) Bei einem anderen 6-seitigen Würfel sind die Flächen schwarz oder weiß gefärbt. Nach 1000-maligem Würfeln erscheint 665 mal schwarz und 335 mal weiß. Gib an, wie viele Flächen des Würfels wahrscheinlich schwarz bzw. weiß sind.