AUFGABENGRUPPE A **06.05.2014**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.
Notiere auch deinen Lösungsweg (durch Rechnung oder in Worten).

   a) $(x^7 - 128) \cdot (x+2)^7 = 0$
   b) $(x-3)^2 \cdot x^5 = 4x^7$
   c) $(x+7)^2 \cdot (x-2) \cdot (x^7 + 128) \geq 0$
   d) $(x-7)^6 = (2x-13) \cdot (x-7)^7$

2. a) Konstruiere ein Sehnenviereck mit Umkreisradius $r = 4{,}0$ cm, das einen Flächeninhalt von $A = 24\ \text{cm}^2$ besitzt.
   b) Konstruiere ein Sehnenviereck mit Umkreisradius $r = 4{,}0$ cm und möglichst großem Flächeninhalt. Begründe deine Konstruktion und gib den Flächeninhalt an.
   c) Konstruiere ein Sehnenviereck mit Umkreisradius $r = 5{,}0$ cm, dessen Diagonalen mit den Längen $e = f = 9{,}0$ cm senkrecht aufeinander stehen.
   Gib auch den Flächeninhalt A des Sehnenvierecks an.

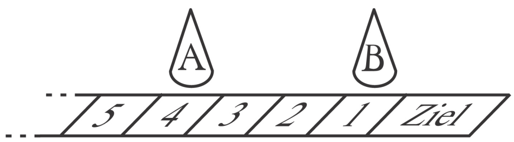
3. Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Koordinaten $A(4|1)$, $B(7|1)$ und $C(4|3)$.
   a) Das Dreieck ABC wird am Punkt $P(0|0)$ gespiegelt.
      (1) Gib die Bildkoordinaten A', B' und C' an.
      (2) Gib die Bildkoordinaten K' eines beliebigen Punktes $K(p|q)$ in Abhängigkeit von p und q an.
   b) Das Dreieck ABC wird am Punkt $P(0|0)$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht.
      (1) Gib die Bildkoordinaten A^*, B^* und C^* an.
      (2) Gib die Bildkoordinaten M^* eines beliebigen Punktes $M(p|q)$ in Abhängigkeit von p und q an.
   c) Das Dreieck ABC wird am Punkt $E(1|2)$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht.
      (1) Gib die Bildkoordinaten A^{**}, B^{**} und C^{**} an.
      (2) Gib die Bildkoordinaten N^{**} eines beliebigen Punktes $N(p|q)$ in Abhängigkeit von p und q an.

4. Im Discounter findet man auf Produkten achtstellige Strichcodes. Die ersten 7 Ziffern (von 0 bis 9) bilden den Produktcode. Die letzte Ziffer ist eine Prüfziffer, um Einlesefehler zu erkennen. Diese Prüfziffer wird aus den anderen sieben Ziffern berechnet.
Bei dem Verfahren EZC (einfacher Zehnercode) wird die Quersumme der ersten sieben Ziffern berechnet. Das Verfahren GTIN (Global Trade Item Number) berechnet eine gewichtete Quersumme: Bevor die Quersumme gebildet wird, wird die 1., 3., 5. und 7. Ziffer mit 3 multipliziert.
Die Prüfziffer ist bei beiden Verfahren die Zahl, die die jeweilige Quersumme zur nächsten durch 10 teilbaren Zahl ergänzt (Beispiel: Quersumme 14, Prüfziffer 6).
Fehler im Produktcode, die oft vorkommen, sind Einzelfehler (eine Ziffer ist falsch), Doppelfehler (zwei Ziffern sind falsch) und Drehfehler (zwei benachbarte Ziffern werden vertauscht).
   a) Gib für die Prüfziffer 7 je ein Beispiel mit verschiedenen Ziffern nach EZC und GTIN an.
   b) Beschreibe den Vorteil des GTIN gegenüber EZC.
   c) Gib ein Beispiel für einen Doppelfehler an, der von EZC, aber nicht von GTIN erkannt wird.
   d) Es gibt Drehfehler, die GTIN nicht entdeckt.
   Welche Bedingungen müssen dafür die beiden vertauschten Ziffern erfüllen?
   e) Angenommen, man würde beim GTIN die Multiplikation mit 3 durch die Multiplikation mit 2 ersetzen und ansonsten alles beibehalten. Zeige, dass dann alle Drehfehler erkannt werden, aber einer der anderen Fehler verstärkt auftritt.

5. Das Zeichen „+“ bezeichnet die übliche Addition und es wird festgelegt:
$\$ + \$ = \$$
$\$ + € = €$
$€ + € = €\$$
$€ + \$.€ = €.€$
$€.\$ = €$
Auf diese Weise lassen sich Rechnungen durchführen wie z. B.:
$€\$ + € = €€$
$€€ + € = €\$\$$
$\$.€€ + \$.€ = €.\$€$
Auch Gleichungen lassen sich lösen:
Beispiel: $€.€\$ + €\$.€€ = X$
Lösung: $X = €\$\$.\$€$
   a) Bestimme X wie im Beispiel:
      (1) $€\$€ + \$€€ = X$
      (2) $X = €\$ + €.€ + \$.\$€$
      (3) $X + X = €€$
      (4) $€€\$.€ = X + €.\$€$
      (5) $X + X + X = €€$
   b) $X = \$.€ + \$.\$€ + \$.\$\$€ + \$.\$\$\$€ + \ldots = \$.€€€€€€€€€€€€\ldots$
      Begründe, dass $X = €$ ist.
   c) Löse die Gleichung: $X + X + X = €$

6. a) Zwei 1-Liter-Flaschen enthalten jeweils 0,5 Liter Limonade. Wie viel Prozent der Limonade aus der ersten Flasche müsste man in die zweite umfüllen, damit diese viermal so viel Limonade enthält wie die erste Flasche?
   b) Zwei Flaschen enthalten unterschiedliche Mengen Cola. Füllt man aus der ersten Flasche 180 ml Cola in die zweite Flasche um, so enthalten beide Flaschen gleich viel Cola. Nach dem Umfüllen enthält die erste Flasche 30 % weniger Cola als vorher.
      Berechne, um wie viel Prozent die Füllmenge in der zweiten Flasche gestiegen ist.
   c) Spezi enthält zu gleichen Teilen Cola und Limonade. In Flasche A ist zu Beginn $\frac{1}{2}$ Liter Spezi, in Flasche B eine unbekannte Menge (reine) Limonade. Zunächst wird $\frac{1}{3}$ der Füllmenge aus Flasche B in A umgefüllt. Anschließend wird die Hälfte von A in B umgefüllt. Daraufhin befindet sich in Flasche B sechsmal so viel Limonade wie Cola.
      Wie viel Limonade war zu Beginn in Flasche B?

7. Bei einem Würfelspiel ziehen die Spielfiguren so viele Felder in Richtung Ziel, wie der Spielwürfel Augen zeigt. Die Spieler würfeln immer in alphabetischer Reihenfolge. Steht auf einem Feld bereits eine Figur, wird diese hinausgeworfen und scheidet aus. Das Spiel gewinnt derjenige, der zuerst ins Ziel kommt, auch mit einer zu großen Augenzahl.



   a) Es gibt zwei Spieler, einer mit Figur A und der andere mit B. Figur A ist am Zug.
      Bestimme jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt.
      (1) Figur A steht auf Feld 4 und Figur B auf Feld 1.
      (2) A steht auf 3 und B auf 2.
      (3) A steht auf 4 und B auf 2.
   b) Die Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen, beträgt für beide Spieler $\frac{1}{2}$. Figur A ist am Zug. Gib eine Möglichkeit an, wie die Spielfiguren stehen können.
   c) Es gibt drei Spieler (mit Figur A, B bzw. C). Figur A steht auf 4 und B auf 2. Figur A ist am Zug. Figur C hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$. Wo kann Figur C stehen? Begründe.

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2013/2014 DES LANDES HESSEN **3. RUNDE**

AUFGABENGRUPPE B **06.05.2014**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

   a) (1) $(3x+2)^2 > (3x+4) \cdot (3x-4)$
      (2) $3 \cdot (2x-7) \cdot (-4x+6) = -24x^2$

   b) Für $y = 1$ und $z = 2$ und einen korrekten Zahlenwert für x wird die folgende Ungleichung eine wahre Aussage: $x^2 < y^2 + z^2$. Gib alle möglichen Zahlenwerte für x an.

2. a) Die Anzahl der Windräder in Hessen steigt ständig. Im Jahr 2011 betrug die so installierte Leistung 700 MW (Megawatt). 2013 waren es 984 MW, das waren 20 % mehr als 2012.
      (1) Wie hoch ist die prozentuale Steigerung von 2011 auf 2013? Runde auf ganze Prozent.
      (2) Berechne die installierte Leistung in Hessen 2012.

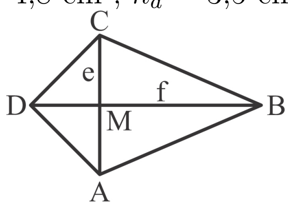
   b) Der Anteil der erneuerbaren Energieträger an der insgesamt in Deutschland im Jahr 2013 erzeugten Energie betrug 25 %, davon entfielen 30 % auf die Windenergie.
      (1) Stelle diesen Sachverhalt in einem beschrifteten Kreisdiagramm mit dem Radius $r = 4$ cm dar. Der Kreis soll die gesamte erzeugte Energie darstellen.
      (2) Berechne den Anteil der Windenergie an der insgesamt erzeugten Energie.

   c) Marco beobachtet, dass sich die Rotoren eines Windrades in einer Minute 9 mal drehen. Er weiß, dass die Rotorspitze eines Windrades 300 m pro Umdrehung zurücklegt.
      Gib die Geschwindigkeit der Rotorspitze in km/h an.

3. a) Konstruiere eine Raute $ABCD$ mit $a = |AB| = 5$ cm und $\delta = 140°$.

   b) (1) Konstruiere die beiden Parallelogramme, für die gilt: $a = |AB| = 4{,}8$ cm ; $h_a = 3{,}5$ cm ; $f = |BD| = 4$ cm.
      (2) Begründe, dass die Flächeninhalte gleich groß sind.

   c) Konstruiere ein Drachenviereck mit $e = |AC| = 6$ cm und $f = |BD| = 10$ cm. Dabei teilt die Diagonale $e = \overline{AC}$ das Drachenviereck in zwei Dreiecke, deren Flächeninhalte sich wie 2:3 verhalten.



4. Die Freunde Leon aus Frankenberg sowie Carsten und Kerstin aus dem Harz benutzen das gleiche Waschmittel *Waschfix* (1,2 kg pro Packung). Während das Wasser im Harz sehr weich ist, ist es in Frankenberg sehr hart (sehr kalkhaltig).

Dosieranleitung (für 4-5 kg Wäsche): pro Waschgang (1 Dosierspender $\hat{=}$ 90 ml $\hat{=}$ 60 g)			
Wasserhärte	leichte Verschmutzung	mittlere Verschmutzung	starke Verschmutzung
weich	40 ml	73 ml	138 ml
hart	106 ml	138 ml	200 ml

   a) Wie oft kann man den Dosierspender mit dem Inhalt einer Packung *Waschfix* füllen?

   b) Leon wäscht mit *Waschfix* nur seine stark verschmutze Trainingskleidung.
      (1) Wie viel Gramm *Waschfix* benötigt er für einen Waschgang?
      (2) Wie viele Waschgänge kann er mit einer Packung *Waschfix* durchführen?

   c) Carsten wäscht ebenfalls seine stark verschmutzte Fußballkleidung.
      Wie viel Prozent Waschmittel spart er gegenüber Leon?

   d) Kerstin wäscht nur ihre leicht verschmutzte Bürokleidung, Leon nur stark verschmutzte Trainingskleidung.
      (1) Wie viele Waschladungen kann sie mit einer Packung *Waschfix* mehr waschen als Leon?
      (2) Sie freut sich: „Ich kann mit einer Packung 500 % mehr Wäsche waschen als Leon."
      Hat sie Recht? Begründe!

5. a) Zeichne das gleichseitige Dreieck ABC mit $c = 5$ cm.

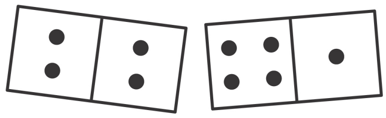
   b) Spiegele das Dreieck ABC an der Seite a. Du erhältst A' als Bildpunkt von A.
   Spiegele das Dreieck ABC an der Seite b. Du erhältst B^* als Bildpunkt von B.

   c) Begründe ohne zu messen, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABA' genauso groß ist wie der des Dreiecks ABC.

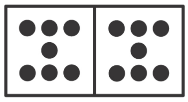
   d) Die Strecken AA' und BB^* schneiden sich im Punkt D.
   Begründe, dass im gleichschenkligen Dreieck $DA'B^*$ gilt: $\delta = \sphericalangle A'DB^* = 120°$.

   e) Der Punkt D teilt die Höhe h_c im Dreieck ABC im Verhältnis $1 : 2$. Begründe ohne zu messen, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $DA'B^*$ viermal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABD.

6. Beim Domino ist jeder Spielstein in zwei Hälften unterteilt, die jeweils eine Augenzahl von 0 bis 6 tragen. Im gesamten Spiel kommen alle Kombinationen von je 2 dieser Augenzahlen genau einmal vor.



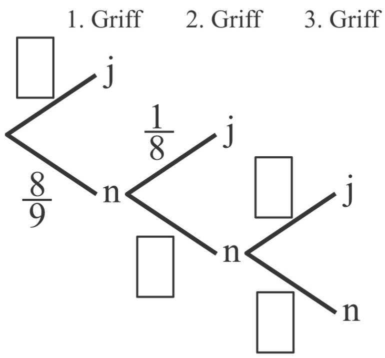
   a) (1) Zeichne alle Dominosteine mit der Augensumme 4.
   (2) Wie viele Steine mit je zwei gleichen Augenzahlen gibt es?
   (3) Aus wie vielen Steinen besteht das gesamte Spiel?
   (4) Bestimme die Summe aller im Spiel vorkommenden Augen.

   b) Beim 7er-Domino wird das ursprüngliche Spiel so erweitert, dass  der Stein mit den meisten Augen ist.
   (1) Wie viele Steine umfasst das 7er-Domino insgesamt?
   (2) Bestimme die Summe aller in diesem Spiel vorkommenden Augen.

   c) Welches ist die größte vorkommende Augenzahl in einem Spiel mit 91 Steinen?

7. a) Antoine sammelt seine Schulunterlagen in einem Schubladensystem. Es gibt neun übereinander liegende Schubladen. Er sucht ein bestimmtes Heft, das sich in einer der neun Schubladen befindet. Er öffnet zufällig eine Schublade und stellt fest, ob sich das gesuchte Heft darin befindet.

   (1) Das Baumdiagramm veranschaulicht die Wahrscheinlichkeiten, das Heft beim ersten Griff zu finden (j: ja, Heft gefunden; n: nein, Heft nicht gefunden).
   Zeichne das Diagramm ab und ergänze die fehlenden Teilwahrscheinlichkeiten.



   (2) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Antoine das Heft
   (2.1) beim zweiten Griff findet.
   (2.2) beim dritten Griff noch nicht gefunden hat.
   (2.3) beim ersten oder zweiten Griff findet.

   b) Antoine will die Schubladen ganz neu gestalten. Er hat Klebefolie in den Farben orange, rosa, türkis, weiß, lila und schwarz.
   (1) Er will die unteren 6 Schubladen mit türkis bekleben. Die übrigen darüber sollen jeweils andere und verschiedene Farben bekommen.
   Notiere alle verschiedenen Farbkombinationen für die übrigen drei Schubladen.
   Beachte: (weiß, orange, rosa) ist die gleiche Farbkombination wie (orange, weiß, rosa).
   (2) Bei einer anderen Gestaltung werden vier übereinander liegende Schubladen in den Farben rosa, türkis, weiß und lila beklebt. Auf wie viele verschiedene Arten kann er die vier Farben anordnen?

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

AUFGABENGRUPPE C **06.05.2014**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Berechne x.

   (1) $10 \cdot (4x - 6) - 10 + 2x = 8x + 32$ (2) $50 + 5x - 4 \cdot (x + 5) = 32$ (3) $\frac{1}{4}x - \frac{3}{5} = 0{,}9$

   b) Eine Telefongesellschaft erhebt pro Monat eine Grundgebühr von 10,60 € und berechnet 0,09 € pro Telefoneinheit. Emine bezahlt am Monatsende 33,10 €.
   Berechne, für wie viele Einheiten sie telefoniert hat.

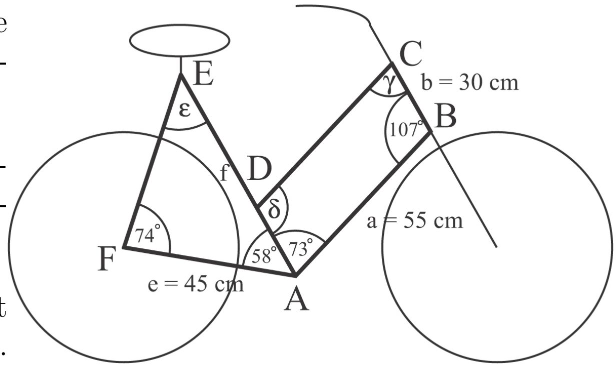
2. Für ein Schulfest werden verschiedene Getränke eingekauft. Diese sollen in Bechern mit jeweils 0,3 l Inhalt verkauft werden. An jedem dieser Becher soll beim Verkauf ein Gewinn von 25 % des Einkaufspreises gemacht werden.

   a) Es werden 300 Besucher erwartet. Man rechnet damit, dass jeder Besucher 0,5 l trinkt.
   Berechne, wie viel Liter Getränke insgesamt benötigt werden.

   b) Der Einkaufspreis z.B. für 1,5 l Eistee beträgt 1,80 €.
   Berechne den Verkaufspreis für einen Becher Eistee.

   c) Apfelschorle wird in 0,5 l Flaschen eingekauft. Ein Becher Apfelschorle (0,3 l) wird für 60 Cent verkauft. Berechne den Einkaufspreis für 0,5 l.

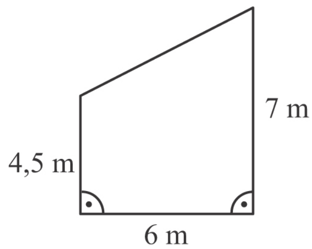
3. Die Rahmenform des abgebildeten Fahrrads (dicke Linien) besteht aus einem Dreieck und einem Parallelogramm.



   a) Konstruiere den Rahmen des Fahrrads auf deinem Reinschriftpapier anhand der angegebenen Maße. Der Maßstab beträgt 1:10.

   b) Die Rahmenhöhe dieses Fahrrads entspricht der Länge f (Strecke $\overline{AE}$) im Dreieck AEF. Die für einen Fahrradfahrer passende Rahmenhöhe berechnet sich aus dem 0,6-fachen seiner Beinlänge. Anton hat eine Beinlänge von 80 cm. Überprüfe, ob dein gezeichneter Rahmen passend für ihn ist. Notiere einen Antwortsatz.

4. Die neue Terrasse von Familie Gerke ist trapezförmig (siehe Abbildung) und soll mit Pflastersteinen ausgelegt werden.



   a) Berechne den Flächeninhalt der neuen Terrasse.

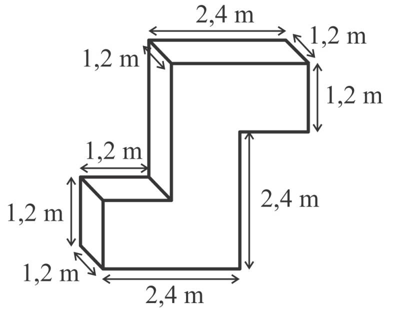
   b) Als Untergrund für die Pflastersteine hat Familie Gerke Splitt (kleine Steine) geliefert bekommen, der mit Schubkarren zur Terrasse gebracht werden muss. Herr Gerke kann seine Schubkarre mit 50 kg Splitt füllen. Er müsste dann insgesamt 56 Mal fahren, um den gesamten Splitt zur Terrasse zu transportieren. Für das Füllen, den Abtransport und das Leeren einer Schubkarre benötigt Herr Gerke 5 Minuten. Frau Gerke füllt ihre Schubkarre mit 40 kg Splitt und sie benötigt für dieselben Arbeitsschritte nur 4 Minuten.

   (1) Berechne, wie oft Frau Gerke fahren müsste, wenn sie den Splitt alleine wegschaffen würde.

   (2) Beide bringen den Splitt in ihren Schubkarren zur Terrasse. Nach zwei Stunden legen sie eine Pause ein. Berechne, wie viel kg Splitt sie bis dahin abtransportiert haben.

   (3) Frau Gerke behauptet: „Es ist egal, wer von uns beiden Splitt transportiert. Jeder braucht dazu dieselbe Zeit. “
   Begründe durch Rechnung, weshalb Frau Gerke recht hat.

5. In einem Park der Stadt Böhne steht die nebenstehende Skulptur aus Beton.

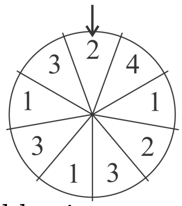


   a) Berechne das Volumen.

   b) Die Skulptur soll mit Wetterschutzfarbe bestrichen werden. Berechne, wie groß die zu streichende Fläche (ohne Standfläche) ist.

   c) Vor einigen Jahren hat die Stadt Böhne diese Skulptur für 5600 € von einer berühmten Künstlerin erworben. Heute liegt der Wiederverkaufswert der Skulptur bei 9800 €.
   Berechne, um wie viel Prozent der Wert der Skulptur gestiegen ist.

6. Bei einem Schulfest hat die Klasse 8a das abgebildete Glücksrad aufgebaut.



   a) Das Glücksrad wird einmal gedreht.
      (1) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Pfeil auf „2“ zeigt.
      (2) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Pfeil auf eine ungerade Zahl zeigt.
      (3) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Pfeil nicht auf „4“ zeigt.
      (4) Gib ein mögliches Ereignis für die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{9}$ an.

   b) Das Glücksrad soll nun dreimal hintereinander gedreht werden.
   Die Ziffern auf den Feldern werden jeweils addiert.
      (1) Lisa hat die Summe 4 erhalten. Gib alle Möglichkeiten an, die zu diesem Ergebnis führen.
      (2) Die Klasse hat sich überlegt, Gewinne nur auszuteilen, wenn man nach der Addition die Zahl „11“ oder „12“ erhält. Gib alle Möglichkeiten an, die zu diesen Ergebnissen führen.

   c) Die Parallelklasse hat ein anderes Glücksrad aufgebaut. Die Felder sind gleich groß und entweder rot, blau oder grün markiert. Insgesamt gibt es 3 grüne Felder. Ein rotes Feld zu treffen, ist dabei doppelt so wahrscheinlich, wie ein blaues Feld zu treffen. Außerdem ist die Wahrscheinlichkeit, ein blaues Feld zu treffen, doppelt so groß, wie die Wahrscheinlichkeit, ein grünes Feld zu treffen. Gib an, in wie viele Felder dieses Glücksrad aufgeteilt ist.

7. Die Kasse in einem Supermarkt erkennt durch Scannen der Artikelnummer (GTIN) unter anderem den Preis des Artikels. Die Artikelnummer ist unterhalb des Balkencodes abgedruckt. Alle Artikelnummern umfassen 13 Ziffern, wobei die letzte Ziffer die Prüfziffer ist. Die Prüfziffer wird nach folgendem Verfahren berechnet (siehe Beispiel):

   1. Multipliziere die ersten 12 Ziffern abwechselnd mit 1 und 3.
   2. Addiere die Produkte.
   3. Ergänze die Summe der Produkte (im Beispiel 79) zum nächsten Vielfachen von 10 (hier 80).
   4. Die Prüfziffer ist die zu ergänzende Zahl (im Beispiel 1).

Beispiel:

Artikelnummer	4	0	0	1	6	8	6	4	7	2	5	2	$\boxed{1}$
Multiplikation	$\cdot 1$	$\cdot 3$	$\cdot 1$	$\cdot 3$	$\cdot 1$	$\cdot 3$	$\cdot 1$	$\cdot 3$	$\cdot 1$	$\cdot 3$	$\cdot 1$	$\cdot 3$	↑
Produkt	4	0	0	3	6	24	6	12	7	6	5	6	Prüf-
	$4+0+0+3+6+24+6+12+7+6+5+6=79$												ziffer

   a) Fertige eine Tabelle wie im Beispiel an. Bestimme zu der folgenden 12-stelligen Artikelnummer die Prüfziffer, sodass eine gültige 13-stellige Artikelnummer entsteht: 462425140723 $\boxed{}$

   b) Bestimme die fehlende Ziffer in der ansonsten richtigen 13-stelligen Artikelnummer:
   408_32838514 $\boxed{7}$

   c) Du hast zwei unterschiedliche Artikelnummern: 460831610423 $\boxed{6}$ und 460831640123 $\boxed{6}$
      (1) Beschreibe, wodurch sich die beiden Artikelnummern unterscheiden.
      (2) Begründe, warum diese beiden unterschiedlichen Artikelnummern dieselbe Prüfziffer haben müssen.