AUFGABENGRUPPE A **04.03.2015**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

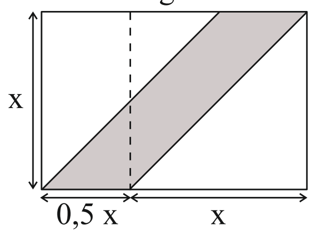
1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

   a) $(3x-5)^2 = 400$
   b) $(3x-5)^2 > 16$
   c) $(3x-5)\cdot(3x+5) \leq 56$
   d) $(3x-5)^2 + (3x+5)^2 > 140$

2. a) Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$ mit dem Flächeninhalt $A = 20$ cm^2 und den Seitenlängen 5 cm und 8 cm. Beschreibe die Konstruktion.

   b) Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB||CD$ ist bekannt, dass sich die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Punkt M senkrecht schneiden. Der Abstand des Punktes M von der Seite AB beträgt 3 cm. Ferner sind $a = |AB| = 7$ cm und $h_{AB} = 5$ cm gegeben. Konstruiere ein Trapez mit diesen Eigenschaften und beschreibe deine Konstruktion.

Figur I



3. In einem Rechteck ist ein Parallelogramm wie in Figur I grau gefärbt.

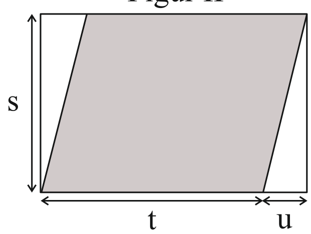
   a) (1) Es ist $x = 1{,}2$ m. Berechne den Flächeninhalt des Teildreiecks rechts unten.

   (2) Bestimme allgemein den Anteil des Parallelogramms an der Gesamtfläche.

   (3) Nun wird Figur I entlang der gestrichelten Linie zerlegt, sodass ein Rechteck und ein Quadrat entstehen. Welcher Anteil der Quadratfläche ist grau gefärbt?

   b) Jetzt wird Figur II betrachtet.

Figur II



   (1) Begründe: Der Anteil des Parallelogramms an der Gesamtfläche ist unabhängig von s stets gleich.

   (2) In einer entsprechenden Figur sollen t und u so gewählt werden, dass das graue Parallelogramm $\frac{4}{7}$ der Gesamtfläche einnimmt. Bestimme das Verhältnis von t und u.

4. Wir rechnen normalerweise im Zehnersystem und verwenden dabei die Ziffern 0, 1,…, 9. Im Dreiersystem gibt es nur die Ziffern 0, 1, 2.
   Beispiel:

	$3^4 = 81$	$3^3 = 27$	$3^2 = 9$	$3^1 = 3$	$3^0 = 1$
$7 = \mathbf{2}\cdot 3^1 + \mathbf{1}\cdot 3^0 = \mathbf{21}_{(3)}$				**2**	**1**
$10 = \mathbf{1}\cdot 3^2 + \mathbf{0}\cdot 3^1 + \mathbf{1}\cdot 3^0 = \mathbf{101}_{(3)}$			**1**	**0**	**1**

   a) Stelle die folgenden Zahlen im Zehnersystem dar.
   (1) $2011_{(3)}$
   (2) $1222_{(3)}$
   (3) $1210_{(3)}$
   (4) $21110_{(3)}$

   b) Eine Zahl ist im Zehnersystem durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Gib entsprechende Teilbarkeitsregeln für das Dreiersystem an
   (1) für die Teilbarkeit durch $2 = 2_{(3)}$;
   (2) für die Teilbarkeit durch $3 = 10_{(3)}$;
   (3) für die Teilbarkeit durch $6 = 20_{(3)}$.

   c) Gib eine im Dreiersystem zehnstellige Zahl an, der im Zehnersystem eine gerade Zahl entspricht.

5. Fußballspiele werden statistisch ausgewertet. Die Spielzeit betrage 90 Minuten.

   a) Der Spielanteil eines Teams wird als Anteil der Spielzeit angegeben, in der das Team den Ball hat.

      (1) Im Spiel „A gegen B“ hatte Team A doppelt so viel Spielanteil wie Team B. Wie hoch war der Spielanteil von Team B in Prozent?

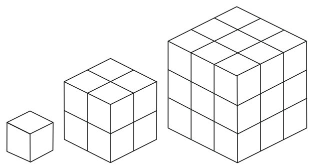
      (2) Im Spiel „C gegen D“ lag bis zur 75. Minute der Spielanteil von Team C bei 56 %. In der letzten Viertelstunde des Spiels konnte Team D das Verhältnis umkehren, d. h. nach der 75. Minute lag der Spielanteil von Team D bezüglich des gesamten Spiels bei 56 %. Wie hoch war der Spielanteil von Team C insgesamt?

      (3) In den ersten 60 Minuten eines weiteren Spiels erreichte Team E einen Spielanteil von 57 %. Dieser Anteil verringerte sich bezogen auf das gesamte Spiel auf 53 %. Wie hoch war der Spielanteil von Team E in der letzten halben Stunde des Spiels?

   b) Bei Spielern werden die Ballkontakte gezählt.

      (1) Bei einem Turnier hatte Spieler M beim ersten Spiel 92, beim zweiten 116, und beim dritten 102 Ballkontakte. Bestimme die Anzahl seiner Ballkontakte im 4. und letzten Spiel, wenn er durchschnittlich 100 Ballkontakte pro Turnierspiel erreichte.

      (2) Spieler R hatte bei einem anderen Turnier nach 8 Spielen durchschnittlich p Ballkontakte pro Spiel. Danach stieg aufgrund einer taktischen Umstellung die Anzahl seiner durchschnittlichen Ballkontakte um 30 %. Wie viele weitere Spiele musste Spieler R spielen, bis sich seine durchschnittliche Anzahl an Ballkontakten insgesamt um 10 % erhöht hatte?

6. 

Körper Nr. n	Anzahl g der Einheitswürfel	Anzahl s der Seitenquadrate
1	1	6
2	8	24

Die dargestellten Würfelkörper setzen sich aus kleinen Einheitswürfeln (Anzahl g) zusammen und wachsen von Schritt zu Schritt wie im Bild dargestellt. Die von außen berührbaren Seitenflächen der Einheitswürfel heißen Seitenquadrate (Anzahl s).

   a) Bestimme g und s für $n = 3$ und $n = 4$.

   b) Bestimme n für $s = 864$.

   c) Stelle zur Berechnung von g und s jeweils einen Term in Abhängigkeit von n auf.

   d) Wie viele Seitenquadrate kommen hinzu, wenn man vom Körper Nr. n zum übernächsten Körper übergeht?

   e) Alle Einheitswürfel, die man berühren kann, wenn man den Körper in die Hand nimmt, heißen Außenwürfel.

      (1) Wie viele Außenwürfel hat der Körper Nr. 4?

      (2) Notiere einen Term für die Anzahl der Außenwürfel des Körpers Nr. n.

7. Die Wahrscheinlichkeit für eine Jungen- bzw. Mädchengeburt wird mit 50 % angenommen.

   a) Eine Familie hat 4 Kinder.

      (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es 4 Mädchen?

      (2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es 3 Jungen und 1 Mädchen?

      (3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens ein Junge unter den Kindern?

      (4) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden ältesten Kinder Jungen?

   b) Eine Familie hat 5 Kinder: 3 Jungen und 2 Mädchen. Zwei Kinder werden zufällig ausgewählt und dürfen am Wochenende bei den Großeltern übernachten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es die beiden Mädchen?

   c) Eine Familie hat 2 Mädchen und einen Jungen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das jüngste Kind ein Mädchen?

   d) Eine Familie hat zwei Kinder. Der Vater erklärt: „Mindestens eines meiner Kinder ist ein Junge.“ Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Familie zwei Jungen?

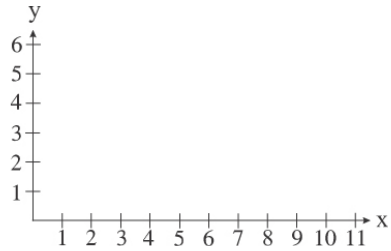
(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

AUFGABENGRUPPE B **04.03.2015**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.
   (1) $(x+1)\cdot(x-1) = x\cdot(x+3) - 10$
   (2) $(4x-8) : 2 = x - 1$
   (3) $2\cdot(4{,}2x - 2{,}8) > 4{,}9 - 3\cdot(x + 1{,}6)$

   b) Welche der folgenden Gleichungen (1) − (3) hat keine Lösung (in $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$)? Begründe.
   (1) $x^2 = 1$ (2) $x^2 = -1$ (3) $x^2 = 0$

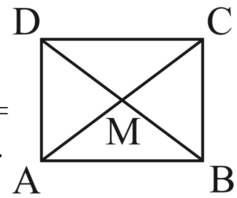


2. a) Zeichne in ein Koordinatensystem (1 Längeneinheit $\hat{=}$ 1 cm) die Punkte $A(0|0)$, $B(3|0)$ und $C(3|5)$ ein und verbinde sie zum Dreieck ABC.

   b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

   c) (1) Spiegele das Dreieck ABC am Punkt $P(5|2{,}5)$. Benenne die Bildpunkte mit A', B' und C'.
   (2) Das Viereck $AC'A'C$ ist ein Parallelogramm. Berechne seinen Flächeninhalt.

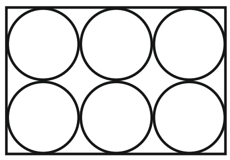
   d) (1) Durch Verschiebung des Dreiecks $C'A'B'$ in x-Richtung entsteht ein Parallelogramm AC^*A^*C. Dieses soll einen Flächeninhalt von 20 cm^2 haben. Gib die Koordinaten der Bildpunkte C^* und A^* an.
   (2) Das Parallelogramm AC^*A^*C ist symmetrisch zum Punkt P^*. Zeichne P^* ein und gib seine Koordinaten an.



3. a) Zeichne ein Rechteck $ABCD$ mit $|BC| = b = 3$ cm und $\sphericalangle AMB = 120°$.

   b) Von einem Dreieck ABC sind der Umkreisradius $r = 3$ cm, die Seite $|AC| = b = 5$ cm und der $\sphericalangle BAC = \alpha = 81°$ gegeben. Konstruiere das Dreieck ABC.

   c) (1) Konstruiere jeweils ein Dreieck ABC mit $|AB| = c = 5$ cm und
   (1.1) α ist genauso groß wie γ, aber halb so groß wie β,
   (1.2) α ist genauso groß wie γ, aber doppelt so groß wie β.
   (2) Yves behauptet (ohne gemessen oder gerechnet zu haben), dass das Dreieck (1.1) einen größeren Flächeninhalt hat als das Dreieck (1.2). Hat er Recht? Begründe.


Vorderansicht

4. Der Großhandel für Sportbedarf bietet Squashbälle in unterschiedlich großen Schachteln an. Ein Squashball hat einen Durchmesser von 4 cm. Die Bälle werden wie in der Abbildung übereinander gestapelt.

   a) Eine quaderförmige Schachtel ist mit Squashbällen gefüllt. Sie ist 32 cm lang, 24 cm breit und 8 cm hoch.
   (1) Berechne das Volumen der Schachtel in cm^3.
   (2) Berechne die Anzahl der Bälle in der Schachtel.
   (3) Ferdinand behauptet: „In eine Schachtel mit gleicher Höhe, doppelter Länge und doppelter Breite passen doppelt so viele Bälle.“ Hat er Recht? Begründe.

   b) Eine andere Schachtel hat eine quadratische Grundfläche und ebenfalls eine Höhe von 8 cm.
   (1) Das Volumen der Schachtel beträgt 1152 cm^3. Gib die Seitenlänge der Grundfläche in cm an.
   (2) Wie viele Squashbälle passen in diese Schachtel?

   c) In eine Schachtel mit quadratischer Grundfläche passen genau 128 Bälle. Gib ein Beispiel für mögliche Maße einer solchen Schachtel an (Länge, Breite, Höhe).

5. Alex benötigt Farbe, um seine neue Wohnung zu streichen. Er sieht folgende Angebote.

Farbe	Eimergröße (Liter)	streichbare Fläche (m^2)	Preis (€)
A	10	70	45
	5	r	x
	2,5	s	y
B	10	t	40
	5	30	22
	2,5	p	z

a) Notiere die Werte für r, s, t und p.

b) Bei Farbe A verringert sich der Preis um 40 %, wenn sich die Eimergröße halbiert. Berechne x und y.

c) Auch bei Farbe B verringert sich der Preis um einen festen Prozentsatz, wenn sich die Eimergröße halbiert.

(1) Berechne diesen Prozentsatz.

(2) Berechne z.

d) Alex will 210 m^2 streichen und möglichst kostengünstig einkaufen. Vergleiche die günstigste Angebotsvariante von Farbe A mit der von Farbe B. Gib den Preisunterschied an.

e) Wenn man Farbe B kauft, kann man gegenüber Farbe A $\frac{6}{7}$ der Fläche streichen und zahlt $\frac{8}{9}$ des Preises. Emma sagt: „Das ist ein gutes Geschäft.“ Hat sie Recht? Begründe!

6. Bei Handballspielen in der E-Jugend gibt es eine besondere Spielwertung. Um die Gesamtpunktzahl einer Mannschaft zu ermitteln, wird die Anzahl der erzielten Tore mit der Anzahl der Torschützen multipliziert. Eine Mannschaft muss mindestens 7 und darf höchstens 14 Spieler einsetzen.

a) Mannschaft A hat mit drei Torschützen 15 Tore erzielt, Mannschaft B mit vier Torschützen 12 Tore. Gib das Endergebnis und die Siegermannschaft an.

b) Eine Mannschaft siegt mit 180 Gesamtpunkten mit mehr als drei Torschützen. Gib alle Möglichkeiten an, wie die Gesamtpunktzahl erzielt werden konnte.

c) Eine Mannschaft erzielt 15 Tore. Gib die höchste und die niedrigste Gesamtpunkzahl an.

d) Mannschaft A erzielt mit 14 Torschützen 196 Gesamtpunkte. Mannschaft B hat nur acht Spieler. Jeder Spieler von Mannschaft B ist Torschütze. Mannschaft B gewinnt.

(1) Wie viel Tore muss Mannschaft B mindestens mehr erzielen als Mannschaft A?

(2) Mannschaft B gewinnt mit dem knappsten Ergebnis das Spiel. Wie viele Tore kann ein Spieler aus Mannschaft B höchstens erzielt haben?

7. Miriam bewahrt ihre Schminksachen in drei verschiedenen Beuteln auf. In einem Beutel ist die Wimperntusche, in einem anderen sind die Lippenstifte und in dem dritten Beutel der Lidschatten für die Augen. Wimperntusche hat sie je einmal in braun und schwarz. Sie hat drei Lippenstifte in den Farben rot, pink und orange. Dazu kommen vier Lidschatten in den Farben gold, blau, grün und lila. Eine mögliche Schminkkombination wäre zum Beispiel (schwarz; rot; gold) für schwarze Wimperntusche, roten Lippenstift und goldenen Lidschatten.

a) (1) Gib zwei weitere Schminkkombinationen an.

(2) Notiere alle Möglichkeiten, wenn Miriam den Lippenstift in der Farbe rot wählt.

(3) Gib die Gesamtzahl der möglichen Schminkkombinationen an.

b) (1) Miriam nimmt den Beutel mit Wimperntusche. Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sie zufällig die schwarze Wimperntusche zieht.

(2) Sie nimmt den Beutel mit Lidschatten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht den grünen Lidschatten zieht?

c) Miriam zieht aus jedem Beutel blind ein Schminkutensil. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Kombination braun und pink dabei ist?

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2014/2015 DES LANDES HESSEN — 2. RUNDE

AUFGABENGRUPPE C — 04.03.2015

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Berechne den Wert des Terms $12y + 3z - 5$ für $y = -4$ und $z = 6$.

   b) Berechne x.

   (1) $3 + 8x - 20 = 6x - 19 + 5x - 4 + 3x$

   (2) $4x + 10 \cdot (4x - 8) = -48 + 32x + 40$

2. Felix, Lisa und Pia erhalten ihr monatliches Taschengeld nach der folgenden Tabelle:

Alter in Jahren	10 bis 11	12 bis 13	14 bis 15	16 bis 17
Taschengeld pro Monat	15,00 €	20,00 €	30,00 €	42,00 €

   a) Seit seinem 10. Geburtstag erhält Felix gemäß dieser Tabelle sein Taschengeld. Sein Taschengeld bekommt er jeweils am ersten Tag eines Monats. Am 1. Februar wurde Felix 13 Jahre alt. Berechne, wie viel Taschengeld er dann seit seinem 10. Geburtstag bis zu diesem Tag insgesamt erhalten hat.

   b) Lisa hat im nächsten Monat Geburtstag und wird 16 Jahre alt. Berechne, um wie viel Prozent Lisas Taschengeld monatlich ansteigt.

   c) Pias Vater verspricht seiner Tochter: „An deinem 18. Geburtstag erhöhe ich dein monatliches Taschengeld um 35 %." Berechne, wie viel Taschengeld Pia bei diesem Angebot ab ihrem 18. Geburtstag bekommt.

3. Der Schall legt in Luft in einer Sekunde 340 m zurück.

   a) Berechne, wie viel Kilometer der Schall in einer Stunde zurücklegen würde.

   b) Anton sieht den Blitz eines Gewitters. Er zählt 12 Sekunden, bis er den Donner hört. Berechne, wie weit das Gewitter noch weg ist. Gib dein Ergebnis in Kilometer an.

   c) Wie lange braucht der Schall, wenn das Gewitter noch 8,5 km weit weg ist?

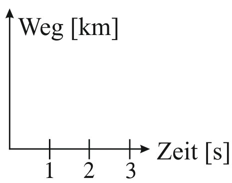
   d) In Meerwasser ist der Schall 4,5 mal so schnell wie in Luft. Berechne, wie viel Meter der Schall in Meerwasser in 5 s zurück legt.

   e) Der Schall legt in Holz in einer Sekunde 4 km zurück.

   (1) Übertrage die Tabelle und ergänze sie.

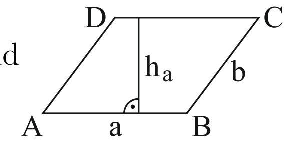
Zeit [s]	0	1	2	3
Weg [km]	0	4		

   (2) Zeichne für diese Zuordnung ein Weg-Zeit-Diagramm (1 km $\hat{=}$ 1 cm).



4. a) Ein Rechteck $ABCD$ hat den Umfang $U = 20$ cm und die Seitenlänge $a = 6$ cm. Zeichne dieses Rechteck und beschrifte die Eckpunkte.

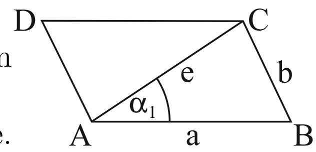
   b) Gegeben ist das Parallelogramm $ABCD$ mit $a = 5$ cm, $b = 3$ cm und $h_a = 2$ cm (siehe Abbildung).



   (1) Konstruiere ein solches Parallelogramm $ABCD$ und beschrifte die Eckpunkte.

   (2) Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.

   c) Gegeben ist ein weiteres Parallelogramm $ABCD$ mit $a = 6$ cm, $e = 5$ cm und $\alpha_1 = 30°$ (siehe nebenstehende Abbildung).
   Konstruiere dieses Parallelogramm $ABCD$ und beschrifte die Eckpunkte.



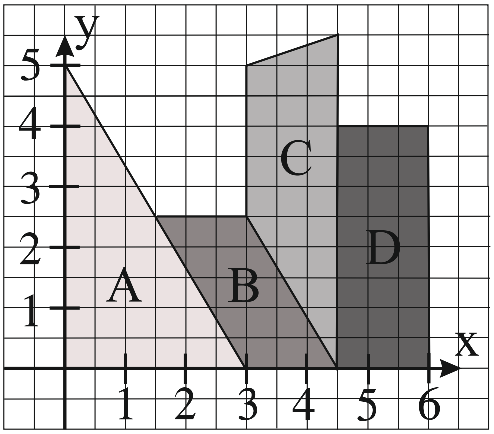
5. In der Abbildung siehst du ein Koordinatensystem (1 Längeneinheit $\hat{=}$ 1 cm), in das die vier Figuren A, B, C und D eingezeichnet sind.

   a) Gib die Koordinaten der Eckpunkte der Figur B an.

   b) Berechne den Flächeninhalt der Figur A.

   c) Berechne den Umfang der Figur D.

   d) Paul behauptet: „Die Flächeninhalte der Figuren C und D sind gleich groß.“ Hat er Recht? Begründe deine Antwort durch eine Rechnung.



6. Familie Schütz (Vater, Mutter, Jan (17 Jahre), Michel (14 Jahre), Laura (12 Jahre)) möchte einen zweitägigen Ausflug in ein nahegelegenes Skigebiet unternehmen. Im Internet finden sie folgende Preistabelle für die Nutzung der Skilifte:

Ticketart	Erwachsene	Kinder (6 - 15 Jahre)
Vormittags (bis 13.00 Uhr)	16,00 €	10,00 €
Nachmittags (ab 13.00 Uhr)	18,00 €	12,00 €
Tagesticket	25,00 €	16,00 €
2-Tagesticket	45,00 €	30,00 €

   a) Familie Schütz kauft für jedes Familienmitglied ein „2-Tagesticket“.
   Berechne, wie viel Euro Familie Schütz dafür bezahlen muss.

   b) Berechne, um wie viel Prozent das Nachmittagssticket für einen Erwachsenen teurer ist als das Vormittagsticket.

   c) Während des Ausflugs möchte Familie Schütz die dortige Kabinenseilbahn nutzen.
   Die Talstation der Seilbahn ist von der Bergstation 435 m entfernt.
   Eine Kabine der Seilbahn kann in einer Sekunde fünf Meter zurücklegen.

      (1) Berechne, wie viel Sekunden die Fahrt von der Talstation bis zur Bergstation insgesamt dauert.

      (2) Berechne, wie viel Kilometer eine Kabine der Seilbahn in einer Stunde zurücklegen könnte.

7. a) Zeichne für jede der folgenden Teilaufgaben jeweils einen Kreis mit dem Radius $r = 2$ cm. Zeichne dann zu jeweils einem Kreis drei Geraden so, dass Folgendes gilt:

      (1) Kreis 1: Die Geraden haben keine Punkte mit dem Kreis gemeinsam.

      (2) Kreis 2: Die Geraden zerlegen die Kreisfläche in vier Teilflächen.

      (3) Kreis 3: Die Geraden zerlegen die Kreisfläche in vier Teilflächen, liegen aber nicht so zueinander wie bei (2).

      (4) Kreis 4: Die Geraden zerlegen die Kreisfläche in sieben Teilflächen.

   b) Zeichne jeweils drei gleich große Kreise mit dem Radius $r = 2{,}5$ cm, so dass gilt:

      (1) Es gibt genau 6 Schnittpunkte der Kreise.

      (2) Es gibt genau 4 Schnittpunkte der Kreise.