AUFGABENGRUPPE A **08.05.2018**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$. Notiere auch deinen Lösungsweg (durch Rechnung oder in Worten).

   a) $(x-5)^5 \cdot (x^5 - 32) \cdot (5-x)^5 = 0$

   b) $(x-5)^5 \cdot (x^5 - 32) \cdot (5-x)^5 < 0$

   c) $(5-x)^5 \cdot (31 - x^5) \geq (x-5)^5$

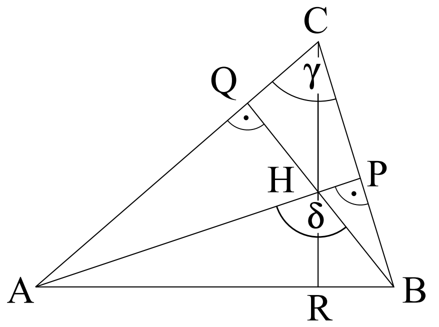
   d) $4 \cdot (x-2)^5 + (2-x)^5 \cdot (x-2)^2 > 0$

2. a) Konstruiere ein Dreieck ABC aus dem Umkreisradius $r_u = 4{,}5$ cm, $a = 7$ cm und $h_c = 6$ cm.

   b) Konstruiere beide nicht kongruente Dreiecke ABC aus $\alpha = 50°$, $h_a = 5$ cm und $h_b = 4$ cm.

   c) Konstruiere ein Dreieck ABC aus $\gamma = 65°$, $c = 8$ cm und $s_c = 6$ cm.

3. Gegeben ist das spitzwinklige Dreieck ABC mit dem Höhenschnittpunkt H.

   a) Wo liegt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABH? Begründe.

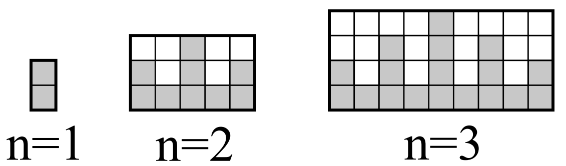
   b) Berechne den Winkel $\delta = \sphericalangle AHB$ (in Abhängigkeit von γ), unter dem sich die Höhen h_a und h_b im Punkt H schneiden. Begründe.

   c) H' entsteht durch Spiegelung von H an $\overline{AB}$. Zeige, dass H' auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt.

   d) Begründe: Die Umkreise der Dreiecke ABC und ABH haben den gleichen Radius.

   e) Wo liegt der Umkreismittelpunkt des Vierecks $ABPQ$? Begründe.

4. Eine Figur besteht aus grauen und (für $n > 1$) weißen Plättchen. Sie wächst von Schritt zu Schritt wie im Bild dargestellt. Die unterste graue Zeile bildet das „Fundament“ $f(n)$ der n-ten Figur. Die übrigen grauen Plättchen stellen den „Aufbau“ $a(n)$ der n-ten Figur dar. Für $n = 2$ gilt z. B. $f(2) = 5$ und $a(2) = 4$.

   a) Gib die Anzahl der grauen Plättchen für $n = 4$ und $n = 5$ an.

   b) Gib eine Formel zur Berechnung von $f(n)$ und $a(n)$ an.

   c) Die komplette Anzahl der benötigten grauen Plättchen ergibt sich aus der Summe $s(n) = f(n) + a(n)$. Für welches n gilt $s(n) = 477$?

   d) (1) Um wie viele graue Plättchen erhöht sich $s(n)$ von $n = 6$ zu $n = 7$?

      (2) Um wie viele graue Plättchen erhöht sich $s(n)$ von der n-ten zu $n+1$-ten Stufe?

   e) (1) Ermittle für $n = 10$ den Anteil der grauen Plättchen an der Gesamtfigur (Angabe als Bruch genügt).

      (2) Begründe, warum für ein beliebig großes n der Anteil der grau gefärbten Plättchen an der Figur stets größer ist als 25 %.

5. Man bestimmt den Salzgehalt einer Salz-Wasser-Mischung, indem man die Masse des Salzes durch die Gesamtmasse der Mischung teilt. Der Salzgehalt der Nordsee ist 3,5 %.

   a) In 800 g salzfreies Wasser werden 200 g Salz gegeben. Bestimme den prozentualen Salzgehalt der Mischung.

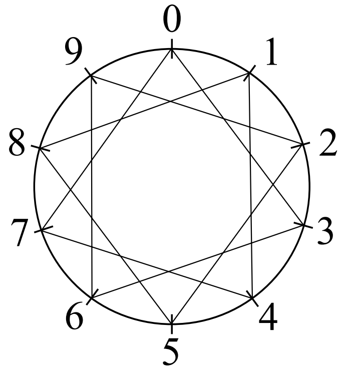
   b) Mischt man 1 kg Nordseewasser mit 99 kg salzfreiem Wasser, so erreicht die Mischung Trinkwasserqualität. Bestimme den Salzgehalt der Mischung in %.

   c) Wie viel salzfreies Wasser muss aus 10 kg Nordseewasser verdunsten, damit der Salzgehalt auf 4 % steigt?

   d) Eine Qualle besteht zu 96 % aus Wasser und wiegt 500 g. Nach einiger Zeit ist sie so ausgetrocknet, dass der Wassergehalt auf 90 % gesunken ist. Wie schwer ist sie dann noch?

   e) Hendrik hat einen Eimer mit Nordseewasser gefüllt und stehen gelassen. Nach einigen Tagen hat sich der prozentuale Salzgehalt durch Verdunstung von reinem Wasser um die Hälfte erhöht. Um wie viel Prozent änderte sich dadurch die Menge des Nordseewassers im Eimer?

6. Wir rechnen normalerweise im Zehnersystem mit den Ziffern 0, 1, …, 9. Im Neunersystem gibt es nur die Ziffern 0, 1,…, 8. Zum Beispiel ist im Zehnersystem $19 = 10 + 9 = 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 = 18 + 1 = 2 \cdot 9^1 + 1 \cdot 9^0$, also im Neunersystem 21 (kurz: $19_{(10)} = 21_{(9)}$).



   a) Zeige: $164_{(9)} + 48_{(9)} = 223_{(9)}$.

   b) Die nebenstehende Darstellung entsteht, indem man die Endziffern der 7er-Reihe im Zehnersystem nacheinander verbindet. Skizziere entsprechend die 7er-Reihe im Neunersystem.

   c) Es wird behauptet, dass es noch eine andere Reihe mit der gleichen Darstellung wie bei b) im Neunersystem gibt. Ist die Behauptung wahr? Begründe und gib gegebenenfalls ein Beispiel an.

   d) Stelle die 3er-Reihe im Neunersystem dar. In einem anderen Zahlensystem gibt es eine andere Reihe mit der vergleichbaren Darstellung. Gib ein Beispiel für das System mit passender Reihe an.

   e) Für $n > 1$ durchläuft eine n-Reihe im Neunersystem alle Eckpunkte. In welcher Beziehung müssen n und 9 dann zueinander stehen?

   f) In welchen k-Systemen ($k > 1$) ergeben sich ausschließlich Darstellungen, bei denen alle Eckpunkte benutzt werden?

7. Ein Stab der Länge 5 cm besitzt nach jedem Zentimeter eine Markierung, die mit den Maßzahlen 1, 2, 3 und 4 bezeichnet wird (siehe Abbildung).

   a) Beate wählt zufällig zwei dieser Markierungen aus, bezeichnet sie mit x und y (wobei $x < y$) und bricht den Stab an diesen Stellen.

      (1) Gib je ein Wertpaar $(x|y)$ an, bei dem sich aus den Bruchstücken ein bzw. kein Dreieck legen lässt.

      (2) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Dreieck legen lässt.

   b) Anne-Kristin wählt bei einem weiteren solchen Stab zufällig zunächst nur eine Markierung x aus und bricht dort den Stab. In einem zweiten Schritt wählt sie zufällig eines der beiden Bruchstücke aus. In einem dritten Schritt sucht sie - falls möglich - auf dem gewählten Bruchstück eine Markierung y aus und bricht dort den Stab erneut.

      (1) Stelle den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar.

      (2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man am Ende nur ein Bruchstück hat?

      (3) Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Dreieck legen lässt?

AUFGABENGRUPPE B **08.05.2018**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.
   (1) $(1 + 2x) \cdot (2 + x) = 2x^2 - 3$
   (2) $(3x - 4)^2 = 4 \cdot (x^2 - 6x + 4)$
   (3) $(5x + 6)^2 > 5 \cdot (5x^2 - 6)$

   b) Schreibe eine zu dem Zahlenrätsel passende Gleichung und bestimme den Wert für x.
   „Multipliziert man eine ganze Zahl x mit ihrem Nachfolger und addiert dazu 25, so erhält man die Summe aus dem Quadrat der Zahl x und 11.“

2. Konstruiere jeweils die folgenden Figuren und beschrifte die Eckpunkte:
   a) ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ ($\overline{AB} || \overline{CD}$), $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 5$ cm und $h_a = 4$ cm
   b) ein Parallelogramm $ABCD$ mit $|AB| = 8$ cm und $|BC| = 5$ cm
   Der Punkt C liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.
   c) eine Raute $ABCD$ mit $|AB| = 5$ cm und $|AC| = 6$ cm
   d) ein Drachenviereck $ABCD$ mit $\overline{BD}$ als Symmetrieachse
   Der Umfang des Teildreiecks ACD beträgt 15 cm, wobei die Länge von $\overline{AC}$ halb so groß ist wie die von $\overline{CD}$. Das Teildreieck ABC hat einen Flächeninhalt von 15 cm^2.

3. An der Graf-Zeppelin-Schule werden zur Schülerbeförderung verschiedene Busse eingesetzt. Die Angaben zu den einzelnen Bussen kannst du der folgenden Tabelle entnehmen.

	kleiner Stadtbus	mittlerer Stadtbus	Gelenkbus
Länge	13,50 m	15,00 m	18,75 m
Breite	2,55 m	2,55 m	2,55 m
Anzahl der Plätze	85	100	150
Durchschnittsverbrauch (leer)	40 l/100 km	50 l/100 km	70 l/100 km
Tankinhalt (Diesel)	215 Liter	215 Liter	300 Liter

   a) Der kleine Stadtbus legt bei einer Leerfahrt eine Strecke von 140 km zurück. Berechne, wie viel Liter Diesel für diese Strecke benötigt werden.
   b) Der mittlere Stadtbus wird vollgetankt. Wie viele Kilometer könnte er bei einer Leerfahrt höchstens zurücklegen?
   c) Beim Gelenkbus erhöht sich der angegebene Durchschnittsverbrauch mit jeder Tonne Zuladung noch einmal um 2 Liter. Gib den Durchschnittsverbrauch eines Gelenkbusses an, der mit Kindern, die durchschnittlich 40 kg wiegen, voll besetzt ist.
   d) Welche durchschnittliche Fläche steht jedem Kind in einem vollbesetzten kleinen Stadtbus zur Verfügung?
   e) Kai beschwert sich lautstark und behauptet, dass selbst Hühnern in Bodenhaltung mehr Platz zur Verfügung steht, als ihm in einem vollbesetzten Gelenkbus. Stimmt die Behauptung, wenn du berücksichtigst, dass 9 Hühnern in Bodenhaltung 1 m^2 zur Verfügung stehen? Begründe.

4. Auf dem Tisch liegen neun Karten (siehe Abbildung). Mit Hilfe der Karten sollen wahre Aussagen gebildet werden, indem man bei jeder Teilaufgabe auf jedes Quadrat eine Karte legt. Schreibe zu jeder der folgenden Aufgaben eine passende Lösung auf.

   $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{9}$

   a) $\square\square + \square\square = 100$
   b) $400 : \square\square = \square\square$
   c) $\square^2 + \square^2 = \square^2$
   d) $2 \cdot (\ \square\square - \square\ ) = \square$
   e) $\square\square\square + \square\square\square = \square\square\square$
   f) $\dfrac{\square\square\square\square}{\square\square\square\square\square} = \dfrac{1}{2}$

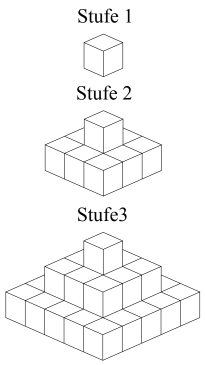
5. In diesem Jahr fanden in Pyeongchang Olympische Winterspiele statt. Dabei kämpften Sportlerinnen und Sportler um Gold-, Silber- und Bronzemedaillen. Olympische Winterspiele fanden in diesem Jahrtausend auch in den Jahren 2002, 2006, 2010 und 2014 statt.

   a) Bei den Olympischen Winterspielen 2018 gewannen Sportlerinnen und Sportler aus Deutschland 14 und aus Kanada 11 Goldmedaillen. Für die Länder Österreich, Frankreich und Schweiz wurden jeweils 5 Goldmedaillen gezählt. Stelle die Verteilung in einem Kreisdiagramm mit dem Radius r = 3 cm dar und beschrifte die Sektoren.

   b) Bei den Olympischen Winterspielen 2010 konnte Deutschland insgesamt 30 Medaillen gewinnen, vier Jahre später nur 19 Medaillen. Berechne, wie viel Prozent weniger Medaillen Deutschland 2014 im Vergleich zu 2010 gewann. Runde auf ganze Prozent.

   c) Die Zahl der 2006 gewonnenen Silbermedaillen ist im Vergleich zum Jahr 2002 um ein Viertel zurückgegangen. Die sechs im Jahr 2014 gewonnenen Silbermedaillen bedeuteten einen Rückgang von 50 % im Vergleich zu 2006. Berechne, wie viel Silbermedaillen 2002 gewonnen wurden.

   d) Im Jahr 2002 gewannen deutsche Sportlerinnen und Sportler 8 Bronzemedaillen und 50 % mehr Goldmedaillen als Bronzemedaillen. Die Zahl der Goldmedaillen lag 2002 sogar um 20 % über der Zahl der Goldmedaillen bei den Olympischen Winterspielen 2010. Bei diesen Winterspielen 2010 entsprach die Zahl der Bronzemedaillen 70 % der Zahl der Goldmedaillen. Berechne, wie viel Bronzemedaillen im Jahr 2010 gewonnen wurden.

6. 

In der Mathe-AG werden aus einzelnen gleich großen Würfeln Pyramiden gebaut (siehe Abbildung). Du erhältst eine neue Stufe, indem du die vorhergehende nach unten erweiterst. In Stufe 2 wurden z. B. 10 Würfel verbaut, von denen aber nur 9 von außen sichtbar sind.

Stufe	Würfel insgesamt	sichtbare Würfel
1	1	1
2	10	9
3		
4		
	...	
		121
	...	
	969	

   a) (1) Übertrage die Tabelle und vervollständige sie.

      (2) Kay möchte die Stufe 25 bauen. Sie hat eine ausreichende, geradzahlige Anzahl von Würfeln zur Verfügung. Begründe, warum nach der Fertigstellung eine ungerade Anzahl von Würfeln übrigbleiben wird.

   b) In Stufe 1 sind 5 Würfelflächen sichtbar, in Stufe 2 insgesamt 25 Flächen. Berechne die Anzahl der sichtbaren Flächen in Stufe 4.

7. Bei periodischen Dezimalbrüchen wiederholen sich die unter dem Strich stehenden Ziffern unendlich oft. Zum Beispiel bedeutet $3{,}3\overline{6} = 3{,}366666\ldots$ oder $1234{,}56\overline{78} = 1234{,}56787878\ldots$
Gegeben sind die Dezimalbrüche $2{,}\overline{018}$, $2{,}0\overline{18}$ und $2{,}01\overline{8}$.

   a) Ordne die drei Dezimalbrüche der Größe nach. Beginne mit dem größten Wert.

   b) Welche Ziffer steht bei den gegebenen Brüchen an der 4. bzw. 20. bzw. 2018. Stelle hinter dem Komma?

   c) (1) An welcher Stelle n ($n > 3$) nach dem Komma stimmen die Ziffern bei allen drei Dezimalbrüchen erstmalig überein? Notiere diese Ziffer.

      (2) Nenne eine allgemeine Vorschrift (Term), mit der man alle Nachkommastellen n errechnen kann, an der genau diese gleiche Ziffer vorkommt.

   d) Notiere alle Möglichkeiten für den Dezimalbruch $0{,}\overline{\square\square\square\square\square}$, wenn alle drei der folgenden Bedingungen erfüllt sind:
   1. Die Ziffern 6; 7; 8; 9 kommen vor.
   2. An der 5. Stelle nach dem Komma steht eine 9.
   3. An der 2018. Stelle steht eine 7.

AUFGABENGRUPPE C **08.05.2018**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Berechne x.

   a) $3x - 15 + x = 2x + 27$

   b) $0{,}5x - 4 + 2{,}2x = 6 - 1{,}3x - 22$

   c) $8x - 9 - 14 - 6x = 13 + 11x - 10 \cdot (x + 0{,}9)$

2. In der nachfolgenden Tabelle sind die durchschnittlichen Mietpreise pro Quadratmeter (m^2) Wohnfläche von einigen hessischen Städten aufgelistet.

Ort	Frankfurt a. M.	Wiesbaden	Marburg	Offenbach	Gemeinde Diemelsee
durchschnittlicher Mietpreis pro m^2	13,50 €	11,50 €	10,20 €	8,70 €	4,00 €

   a) Jan wohnt in einer 60 m^2 großen Wohnung in Marburg. Er bezahlt pro Quadratmeter Wohnfläche 15 % des durchschnittlichen Mietpreises weniger. Berechne den Mietpreis pro Quadratmeter für Jans Wohnung.

   b) Julia ist Mieterin einer Wohnung in der Gemeinde Diemelsee. Im Herbst wird sie nach Frankfurt umziehen. Berechne, um wie viel Prozent der durchschnittliche Mietpreis pro m^2 in Frankfurt höher ist als in der Gemeinde Diemelsee.

   c) Tom sucht eine Mietwohnung in Wiesbaden. Im Internet hat er von der Mietpreisbremse gelesen, nach der bei einer Neuvermietung der Mietpreis höchstens um 10 % über dem durchschnittlichen Mietpreis in Wiesbaden liegen darf. Tom findet in der Zeitung folgendes Wohnungsangebot: 64 m^2 Wohnfläche für 768 €. Überprüfe rechnerisch, ob bei diesem Wohnungsangebot die Mietpreisbremse eingehalten wird und notiere einen Antwortsatz.

3. Goldschmuck kann unterschiedliche Goldanteile haben. Möchte man Goldschmuck verkaufen, bestimmt der Goldanteil den Preis. Zur Zeit liegt der Goldpreis von reinem Gold bei ungefähr 36,00 € pro Gramm. Der Preis von 333er Gold beträgt demnach 12,00 € pro Gramm, also $33{,}\overline{3}$ % des Preises des reinen Goldes.

   a) Berechne den Goldpreis von 0,5 g reinem Gold.

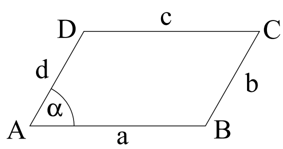
   b) Wie schwer ist ein Goldbarren aus reinem Gold, wenn dieser einen Wert von 144,00 € hat?

   c) Gold mit einem Anteil von $33{,}\overline{3}$ % an reinem Gold wird als 333er Gold bezeichnet. Silvia hat einen Ring, der zu $\frac{5}{6}$ aus reinem Gold besteht. Wie wird dieses Gold dann bezeichnet?

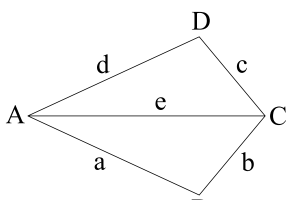
   d) Elkes Goldkette aus 585er Gold wiegt 5 g. Berechne den Goldpreis des Schmuckstückes.

4. Konstruiere die folgenden Vierecke und beschrifte jeweils die Eckpunkte.

   a) Konstruiere das Parallelogramm $ABCD$ mit $a = 5$ cm, $b = 3$ cm und $\alpha = 60°$.

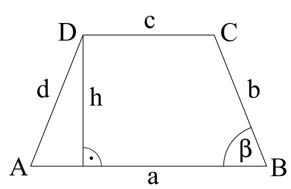


   b)

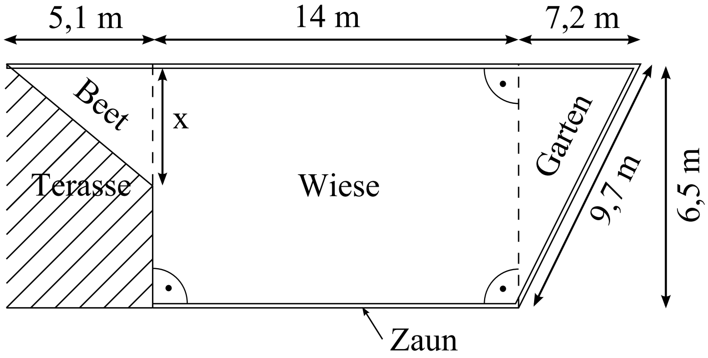


   Konstruiere das Drachenviereck $ABCD$ mit der Diagonale $e = |AC| = 7$ cm, $b = 3$ cm und $d = 5$ cm.

   c) Konstruiere das gleichschenklige Trapez $ABCD$ $(a||c)$ mit $a = 6$ cm, $h = 2{,}8$ cm und $\beta = 80°$.

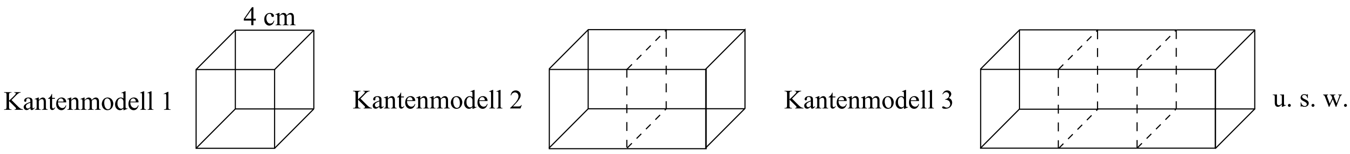


5. Die Abbildung zeigt die Grundfläche eines geplanten Außengrundstücks, das aus einer Terrasse, einem Beet, einer Wiese und einem Garten besteht.



   a) Berechne die Größe des Flächeninhalts der Wiese.
   b) Die Fläche des Gartens soll mit Erde aufgefüllt werden. Für eine Fläche von 2 m^2 wird ein 60-Liter-Sack Erde benötigt. Wie viele Säcke Erde müssen gekauft werden?
   c) Die Fläche des Beetes hat eine Größe von 7,65 m^2. Berechne die Länge x.
   d) Beet, Wiese und Garten sollen teilweise eingezäunt werden (siehe Doppellinie in der Abbildung). Ein Meter Zaun kostet 13,40 €. Berechne die Kosten für den Zaun.

6. Luisa bastelt aus 12 Trinkhalmen das Kantenmodell eines Würfels (siehe Kantenmodell 1). Jeder Trinkhalm ist 4 cm lang. Da sie noch genügend Trinkhalme übrig hat, befestigt Luisa 8 weitere Trinkhalme an Kantenmodell 1 und erhält dadurch Kantenmodell 2. Nach diesem Prinzip kann Luisa weitere Kantenmodelle herstellen. Jedes Kantenmodell bildet insgesamt einen Quader.

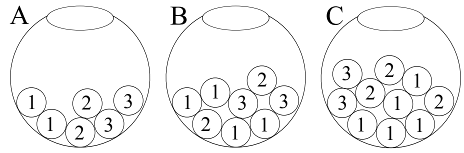


   a) Übertrage die nachfolgende Tabelle auf dein Reinschriftpapier und bestimme die fehlenden Werte.

Kantenmodell	1	2	3	7	
Anzahl der Trinkhalme insgesamt	12	20			100

   b) Luisa hat schließlich ein solches Kantenmodell hergestellt, dessen längste Kante 96 cm lang ist.
      (1) Gib an, das wievielte Kantenmodell das ist.
      (2) Berechne, wie lang die äußeren Kanten des Quaders insgesamt sind. Gib das Ergebnis in Metern an.
      (3) Gib an, wie viele Strohhalme des Kantenmodells nicht zu den Außenkanten des Quaders gehören.

7. In den Urnen A, B und C befinden sich unterschiedlich viele Kugeln, die jeweils mit den Zahlen 1, 2 oder 3 beschriftet sind (siehe Abbildung).



   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus Urne A zufällig eine Kugel mit der Zahl 2 zu ziehen?
   b) Bei welchen beiden Urnen ist die Wahrscheinlichkeit für das zufällige Ziehen einer Kugel mit der Zahl 1 gleich groß?
   c) Bei welcher der Urnen beträgt die Wahrscheinlichkeit 30 %, zufällig eine Kugel mit der Zahl 2 zu ziehen?
   d) Daniel behauptet: „Bei allen drei Urnen ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig eine Kugel mit der Zahl 3 zu ziehen, gleich groß!“ Hat Daniel recht? Begründe deine Antwort.
   e) Aus Urne A werden zufällig zwei Kugeln nacheinander gezogen. Nach dem ersten Zug wird die gezogene Kugel nicht zurück in die Urne A gelegt. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zuerst eine Kugel mit der Zahl 1 und dann eine Kugel mit der Zahl 2 gezogen wird.
   f) Eine Kugel wird aus Urne C in Urne B gelegt. Dadurch erhöht sich bei Urne B die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen der Kugel mit dieser Zahl auf $\frac{1}{3}$. Mit welcher Zahl ist die Kugel aus Urne C beschriftet, die in Urne B gelegt wurde?