AUFGABENGRUPPE A — **03.03.2021**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

   a) $64 - (x-7)^3 = 0$

   b) $256 - (x-7)^4 > 0$

   c) $(x-7)(x+7)^4 = (x-7)$

   d) $(x^2 - 49) \cdot (x^2 - 14x + 49) \leq 0$

2. a) Konstruiere das Dreieck ABC mit $\alpha = 52°$, $w_\alpha = 6{,}5$ cm und $a = h_c$.

   b) Konstruiere das Dreieck ABC mit $\alpha = 52°$ und $w_\alpha = s_a = 6{,}5$ cm.

   c) Konstruiere das Dreieck ABC mit $\alpha = 52°$, $w_\alpha = 6{,}5$ cm und $a = b$.

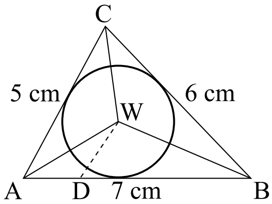
3. Verschiedene Figuren sollen durch geradlinige Schnitte in drei gleich große Teilflächen zerlegt werden. Diese müssen aber nicht kongruent zueinander sein.

   a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Rechteck $ABCD$ mit den Punkten $A(0|0)$, $B(9|0)$, $C(9|6)$ und $D(0|6)$ ein. Zerlege das Rechteck in drei gleich große Teilflächen mit

      (1) zwei Schnittlinien, die durch den Eckpunkt C verlaufen,

      (2) drei Schnittlinien, die im Mittelpunkt $M(4{,}5|3)$ des Rechtecks starten,

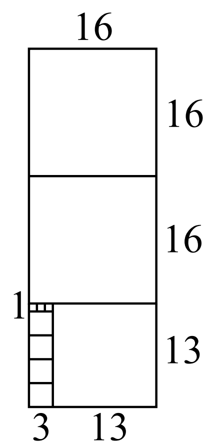
      und gib jeweils die Koordinaten der Punkte an, in denen die Schnittlinien auf die Rechtecksseiten treffen.

   b) Im nebenstehenden Dreieck ABC sind die Seitenlängen $a = 6$ cm, $b = 5$ cm und $c = 7$ cm sowie der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden W vorgegeben.

      (1) Begründe: Die Größe des Flächeninhalts des Dreiecks WBC beträgt ein Drittel der Größe der Fläche des Dreiecks ABC.

      (2) Der Punkt D soll so auf der Seite $\overline{AB}$ gewählt werden, dass mit den Strecken $\overline{WD}$, $\overline{WC}$ und $\overline{WB}$ das Dreieck ABC in drei gleich große Teilflächen zerlegt wird. Bestimme die Länge der Strecke $\overline{AD}$.

4. 

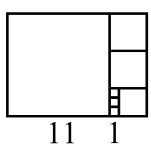
   Jörg teilt das nebenstehende Rechteck nach und nach so auf, dass es nur noch aus Quadraten zusammengesetzt ist. Die jeweiligen Seitenlängen der Quadrate erhält man auch, wenn man den Bruch $\frac{45}{16}$ folgendermaßen zerlegt:

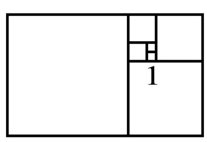
   $$\frac{45}{16} = \frac{2 \cdot 16 + 13}{16} = 2 + \frac{13}{16} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{16}{13}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{13}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{13}{3}}} = \mathbf{2} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{4} + \cfrac{1}{\mathbf{3}}}}$$

   Wir betrachten nur den letzten Term:
   Am Ende der Zerlegung steht in allen Zählern die Zahl 1.
   Diesen Term nennt man einen *Kettenbruch* und stellt ihn mit einer Klammerschreibweise der fett gedruckten Zahlen dar: [2|1|4|3]

   a) Welche Bedeutung haben die Zahlen 2, 1, 4, 3 in der Zerlegung des obigen Rechtecks?

   b) Wandle $\frac{14}{3}$ in einen Kettenbruch um und gib ihn in der Klammerschreibweise an. Zeichne auch die Zerlegung des Rechtecks.

   (1) 

   (2) 

   c) Welcher Kettenbruch ist dargestellt bei (1) bzw. (2)? Notiere in der Klammerschreibweise.

   d) Gib mit Hilfe der Tabelle den Kettenbruch an für (1) $\frac{9^2}{8^2}$ (2) $\frac{(2n+1)^2}{(2n)^2}$

$\frac{5^2}{4^2}$	[1|1|1|3|2]
$\frac{7^2}{6^2}$	[1|2|1|3|3]
$\frac{9^2}{8^2}$	[| | | |]
$\frac{11^2}{10^2}$	[1|4|1|3|5]

   e) (1) Berechne den Bruch zu [2|1|4] und gib den Dezimalbruch dazu an.

      (2) Begründe: $[2|1|n] < 3$ für $n > 0, n \in \mathbb{N}$.

5. Anton spart sich einen Teil der Führerscheinkosten selbst zusammen. Am Tag vor seinem 15. Geburtstag hatte er 350 € auf dem Bankkonto. Nun überweisen ihm seine Eltern jeweils an seinem Geburtstag 10 % seines bis dahin angesparten Geldes.

   a) Wie viel Geld hätte er dadurch an seinem 15. Geburtstag auf seinem Bankkonto?

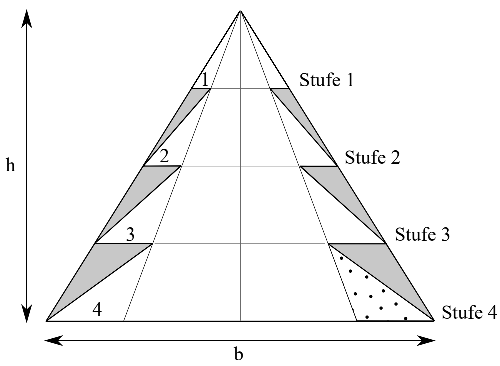
   b) Zum 15. Geburtstag zahlen Antons Großeltern ihm einen Geldbetrag auf sein Bankkonto ein. Von seinen Eltern erhält er anschließend 10 % Zinsen. Dadurch hat er am Ende 440 € auf dem Konto. Welchen Betrag haben ihm seine Großeltern eingezahlt?

   c) Nach seinem 15. Geburtstag hat er 440 € auf dem Konto. Danach zahlt er jährlich 130 € ein. Welchen Kontostand kann er an seinem 18. Geburtstag erwarten?

   d) Mit einem jährlichen Sparbetrag von 130 € erreicht er an seinem 18. Geburtstag nicht seinen Zielbetrag von 1100 €. Wie hoch müsste die jährliche Zuzahlung nach seinem 16. Geburtstag mindestens sein, um dieses Ziel an seinem 18. Geburtstag zu erreichen?

   e) Anton möchte schon mit 17 statt mit 18 seinen Führerschein machen. Deshalb bittet er seine Eltern, an seinem 17. Geburtstag einmalig sein Guthaben mit 20 % zu verzinsen. Reicht das aus? Begründe.

6. Eine Schablone in Form eines Tannenbaums soll aus einem gleichschenkligen Dreieck, bei dem die Basislänge b gleich der Höhe h ist, hergestellt werden. Die Höhe wird in n gleich hohe Stufen geteilt. Die grauen Dreiecke werden weggeschnitten. Dabei entspricht die Schnitttiefe der Stufennummer. Es gilt: $b = h = 24$.



   a) In der nebenstehenden Skizze ist die Höhe in $n = 4$ Stufen geteilt worden.
      (1) Berechne den gesamten Flächeninhalt der entfernten Dreiecke.
      (2) Berechne den Flächeninhalt der Tannenbaumschablone.

   b) Die Höhe des Ausgangsdreiecks wird nun in $n = 6$ Stufen geteilt.
      (1) Berechne den gesamten Flächeninhalt der entfernten Dreiecke.
      (2) Berechne den Flächeninhalt der Tannenbaumschablone.

   c) Erstelle eine Formel für den gesamten Flächeninhalt der entfernten Dreiecke für ein beliebiges n ($n \in \mathbb{N}$). Verwende dazu $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$.

   d) Zeige, dass der Inhalt des in der Skizze gepunkteten Dreiecks unabhängig von der Anzahl der Stufen immer 12 Flächeneinheiten beträgt.

   e) Zeige, dass für beliebige Werte von $b = h$ der Inhalt des in der Skizze gepunkteten Dreiecks unabhängig von der Anzahl der Stufen immer $\frac{h}{2}$ Flächeneinheiten beträgt.

7. Die Schülervertretung organisiert alljährlich einen Flohmarkt in der Aula. Insgesamt stehen jedes Jahr von 1 bis 20 durchnummerierte Stände zur Verfügung, die auf einem Kreis angeordnet sind. Die Zuteilung der Stände durch die Schülervertretung erfolgt dabei per Los. Die vier 8. Klassen der Schule nehmen auch am Flohmarkt teil. Jede Klasse meldet sich jeweils für einen Stand an.

   a) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
      (1) Die Klasse 8a bekommt den Stand mit der Nummer 4 zugelost.
      (2) Die vier 8. Klassen bekommen in der Reihenfolge 8a, 8b, 8c und 8d
         (2.1) die Stände 10 bis 13 zugelost,
         (2.2) im Uhrzeigersinn benachbarte Stände zugelost.
      (3) Die vier Klassen bekommen die Stände 10 bis 13 (in beliebiger Reihenfolge) zugelost.
      (4) Die Stände der 8b und 8c liegen nebeneinander.

   b) Die Klasse 8d nimmt bereits seit der 5. Klasse an dem Flohmarkt teil. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie in diesen vier Jahren vier Stände mit jeweils unterschiedlicher Nummern zugelost bekommen hat?

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

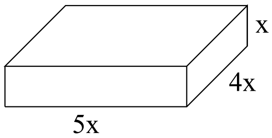
AUFGABENGRUPPE B **03.03.2021**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Gegeben ist die Ungleichung: $2 \cdot (4x - 3) < 3x - (8 + 5x)$
   (1) Löse die Ungleichung.
   (2) Gib die größte ganze Zahl an, die zur Lösung gehört.

   b) Wenn man das Dreifache einer Zahl x um 5 vermindert, so erhält man die Hälfte der gesuchten Zahl x.
   (1) Stelle eine passende Gleichung auf.
   (2) Um welche Zahl x handelt es sich?

   c) (1) Berechne die Gesamtlänge der Kanten des abgebildeten Quaders, wenn $x = 2$ cm beträgt.
   (2) Die Gesamtlänge der Kanten eines entsprechenden Quaders beträgt 3,60 m. Bestimme Länge, Breite und Höhe dieses Quaders.



   (3) Ricky behauptet: „Wenn man die Länge jeder Kante eines solchen Quaders verdoppelt, so verdoppelt sich auch sein Volumen.“ Hat Ricky recht? Begründe.

2. a) (1) Zeichne ein Koordinatensystem (1 LE $\hat{=}$ 1 cm) und beschrifte es. Trage anschließend die Punkte $A(-5|-4)$ und $D(-5|4)$ ein.
   (2) Spiegle die Punkte A und D an der y-Achse. Benenne den Bildpunkt von A mit B und den Bildpunkt von D mit C. Gib jeweils die Koordinaten der Bildpunkte an. Verbinde die Punkte zum Viereck $ABCD$.

   b) Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten des Vierecks $ABCD$, so erhält man das Viereck $EFGH$. Dabei ist E der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Zeichne das Viereck $EFGH$ und benenne alle Eckpunkte.

   c) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $EFGH$.

   d) Verschiebe den Punkt E so, dass sich ein Drachenviereck $E'FGH$ mit dem Flächeninhalt 60 cm^2 ergibt. Gib die Koordinaten des Punktes E' an und begründe deine Antwort.

3. a) Konstruiere das Dreieck ABC mit $c = 5$ cm, $\alpha = 60°$ und der Winkelhalbierenden $w_\alpha = 4$ cm.

   b) (1) Konstruiere das Dreieck ABC mit $c = 6$ cm, $\beta = 90°$ und $a = 6$ cm.
   (2) Verbinde die Mittelpunkte der Dreiecksseiten zu einem kleineren Dreieck. Simon behauptet: „Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist dreimal so groß wie der Flächeninhalt des kleineren Dreiecks.“ Hat er recht? Begründe deine Antwort.

   c) Konstruiere die beiden unterschiedlichen Dreiecke ABC mit $c = 7$ cm, $h_c = 4$ cm und $a = 5$ cm.

4. Die Mathe-AG setzt einen großen Würfel aus 64 kleinen, weißen Einheitswürfeln zusammen und färbt die Oberfläche des großen Würfels blau. Anschließend zerlegt sie den großen Würfel wieder in seine Bestandteile.

   a) Wie viele kleine Würfel gibt es anschließend, bei denen genau
   (1) drei Seiten blau gefärbt sind,
   (2) zwei Seiten blau gefärbt sind,
   (3) eine Seite blau gefärbt ist,
   (4) keine Seite gefärbt ist?

   b) Kai möchte nun einen großen Würfel herstellen, bei dem 96 Flächen genau eine blaue Seite haben können. Aus wie vielen kleinen Würfeln setzt sich dieser große Würfel zusammen?

   c) Nele behauptet: „Ich habe einen großen Würfel gebaut und die Oberfläche gefärbt. Als ich nach der Zerlegung die kleinen Würfel gezählt habe, hatten 2648 genau eine blaue Seite.“ Kann Nele recht haben? Begründe.

5. Vom 1. Juli 2020 bis zum 31. Dezember 2020 wurde der reguläre Mehrwertsteuersatz von 19 % auf 16 % gesenkt. Die Mehrwertsteuer ist ein bestimmter Anteil vom Nettopreis einer Ware. Die Summe aus Nettopreis und Mehrwertsteuer bildet den Verkaufspreis.

   a) Familie Weber hat im Herbst 2020 ein Auto (Nettopreis = 20 000 €) gekauft.

      (1) Welchen Kaufpreis musste die Familie zahlen?

      (2) Wie viel Euro hat die Familie im Vergleich zum Frühjahr gespart?

   b) Familie Schneider hat im Oktober 2020 ein Auto für 17 400 € gekauft. Berechne den Nettopreis des Autos.

   c) Omar hat im Sommer ein Praktikum in einem Elektronikmarkt gemacht und sollte Preisschilder für Spielekonsolen neu beschriften. Diese haben vor dem 1. Juli noch 476 € gekostet. Hat er richtig gerechnet? Begründe.

      Neu: 461 €

   d) Für bestimmte Artikel wie z.B. Lebensmittel, Blumen, Bücher oder Zeitungen gilt ein ermäßigter Mehrwertsteuersatz. Dieser ermäßigte Steuersatz sank ab 1. Juli 2020 von 7 % auf 5 %. Wie viel kostete ein Buch im Mai, das im Juli für 7,35 € verkauft wurde?

6. Die Tabelle zeigt den durchschnittlichen Kraftstoffverbrauch ausgewählter Fahrzeuge:

Fahrzeug	durchschnittlicher Kraftstoffverbrauch auf 100 km
A	6,8 Liter
B	8,0 Liter
C	
D	6,4 Liter
E	4,4 Liter

   a) Berechne die Kraftstoffkosten für eine 500 km lange Fahrt mit Fahrzeug A, wenn ein Liter 1,29 € kostet.

   b) Berechne, wie weit man für 30 € mit Fahrzeug B fahren kann, wenn ein Liter 1,20 € kostet.

   c) Fahrzeug C hat auf einer Strecke von 450 km 28,35 Liter verbraucht. Berechne den durchschnittlichen Kraftstoffverbrauch pro 100 km.

   d) Wie viele Kilometer müsste man bei einem Literpreis von 1,25 € mit Fahrzeug E fahren, damit die Ersparnis gegenüber dem Fahrzeug D 100 € beträgt?

7. Wir betrachten die natürlichen Zahlen von 1 bis 100.

   a) Wie viele dieser Zahlen bestehen nur aus

      (1) geraden Ziffern,

      (2) ungeraden Ziffern?

   b) Bei wie vielen der zweistelligen Zahlen ist

      (1) die Summe der beiden Ziffern genau 5,

      (2) die Ziffer an der Zehnerstelle kleiner als die Ziffer an der Einerstelle?

   c) Stelle dir vor, du bildest aus den ersten 100 natürlichen Zahlen eine neue Zahl derart, dass du (mit 1 beginnend und mit 100 endend) alle diese Zahlen der Größe nach aneinanderreihst. Also heißt die Zahl: 12345678910111213...96979899100

      (1) Aus wie vielen Ziffern besteht diese Zahl?

      (2) Welche Ziffer steht bei dieser Zahl an der 50. Stelle?

      (3) Wie oft kommt die Ziffer 1 vor?

      (4) Welche Ziffer kommt am seltensten vor?

AUFGABENGRUPPE C **03.03.2021**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Übertrage die Tabelle auf dein Reinschriftpapier und berechne die fehlenden Werte.

a	b	$2 \cdot a - b$
8	7	
-10	12	
25		40

   b) Berechne x.

   (1) $20x - 8 = 12x + 40$

   (2) $19x + 24 - 13x = 10 + 4x - 30$

2. Gegeben ist ein Rechteck mit den Maßen $a = 5$ cm und $b = 2$ cm.

   a) (1) Zeichne das Rechteck.

   (2) Markiere in deinem Rechteck 30 % des Flächeninhaltes.

   b) Tim verlängert die Seitenlänge a um 20 %. Berechne den Flächeninhalt dieses neuen Rechtecks.

   c) Lisa verlängert die Seite b und erhält ein neues Rechteck mit einem Flächeninhalt von 50 cm^2. Berechne, um wie viel Prozent Lisa die Seite b verlängert hat.

3. Die Tabelle zeigt die Preise des Campingplatzes „Schöne Aussicht“.

Preisliste	Preis pro Übernachtung
Erwachsener	8 €
Kind (bis 17 Jahre)	6 €
Hund	5 €
PKW-Stellplatz mit Zeltplatz	14 €

   a) Frau Jäger reist mit ihrem Mann und ihren zwei Kindern (5 und 8 Jahre) mit dem PKW an. Außerdem haben sie ihren Hund und ein eigenes Zelt dabei. Berechne, wie viel Euro Familie Jäger für 6 Übernachtungen bezahlen muss.

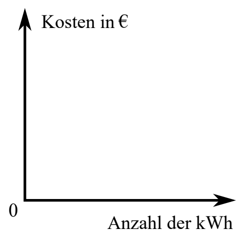
   b) Herr Müller reist allein mit dem PKW an. Für seine Übernachtungen im Zelt möchte er nicht mehr als 200 € ausgeben. Berechne, für wie viele Übernachtungen das Geld ausreicht. Notiere einen Antwortsatz.

   c) Für einen Stromanschluss muss auf dem Campingplatz eine einmalige Gebühr von 3 € bezahlt werden. Hinzu kommen Kosten von 0,50 € pro Kilowattstunde (kWh).

   (1) Übertrage die Wertetabelle und berechne die fehlenden Werte.

Anzahl der kWh	0	1	5	8
Kosten in €	3,00	3,50		

   (2) Zeichne ein geeignetes Koordinatensystem, trage alle Wertepaare aus der Tabelle ein und verbinde sie.



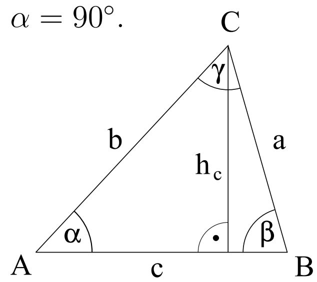
4. Konstruiere die nachfolgenden Dreiecke und beschrifte jeweils die Eckpunkte.

   a) (1) Konstruiere das Dreieck ABC mit $c = 5$ cm, $b = 3$ cm und $\alpha = 90°$.

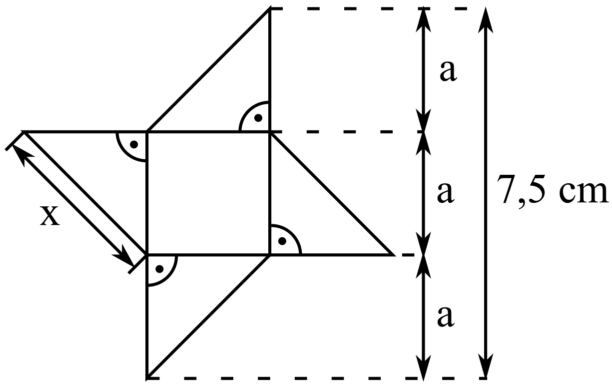
   (2) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

   b) Konstruiere das Dreieck ABC mit $c = 7{,}7$ cm, $b = 5{,}5$ cm und $a = 6{,}5$ cm.

   c) Konstruiere das Dreieck ABC mit $c = 7{,}5$ cm, $\beta = 75°$ und $h_c = 4{,}5$ cm.



5. Die Abbildung zeigt eine Figur, die sich aus einem Quadrat und vier deckungsgleichen Dreiecken zusammensetzt. Alle Dreiecke sind rechtwinklig und gleichschenklig.

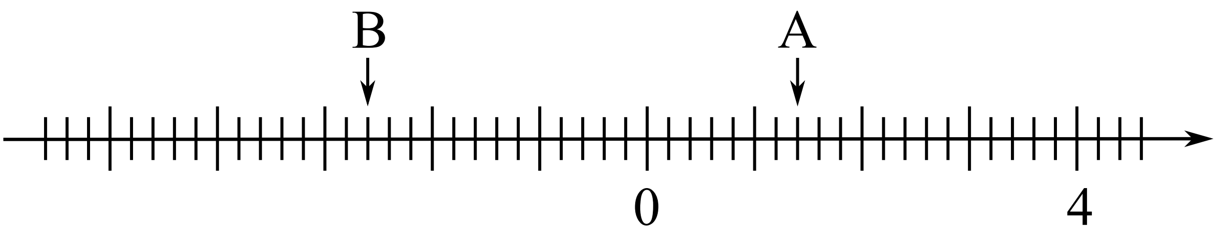


   a) Berechne die Länge a.
   b) Berechne den Flächeninhalt der Figur.
   c) (1) Zeichne eines der vier Dreiecke der Figur mit den korrekten Maßen auf dein Reinschriftpapier.
      (2) Miss in deiner Zeichnung die Länge der Seite x und notiere diese.
      (3) Berechne den Umfang der gesamten Figur.

6. Lars hat eine quaderförmige Tischplatte aus Beton gegossen. Sie ist 120 cm lang, 120 cm breit und 3 cm hoch.

   a) Lars möchte alle Flächen der Tischplatte versiegeln. Um die richtige Menge Betonversiegelung kaufen zu können, benötigt er die Größe der Oberfläche.
      (1) Berechne die Oberfläche der Tischplatte.
      (2) Die Versiegelung gibt es in 250-ml-Dosen. 250 ml reichen für 25 000 cm^2. Wie viele Dosen muss Lars besorgen?
   b) Um die richtigen Tischbeine auswählen zu können, muss Lars vorher berechnen, wie schwer die Tischplatte ist.
      (1) Berechne das Volumen der Tischplatte.
      (2) 1 cm^3 Beton wiegt 2,4 g. Berechne, wie schwer die Tischplatte ist. Gib dein Ergebnis in ganzen Kilogramm an.

7. a) Übertrage die Zahlenfolgen auf dein Reinschriftpapier und ergänze die fehlenden Zahlen.
      (1) $15; 7; -1; -9; \square; \square; -33; \ldots$
      (2) $-6; 12; -24; 48; \square; \square; -384; \ldots$
      (3) $258; \square; \square; 72; 18; 24; 6; 12; \ldots$
   b) Auf der abgebildeten Zahlengeraden wurden Zahlen mit Pfeilen und Buchstaben markiert.



      (1) Gib die Zahlen an, die auf der Zahlengeraden mit den Buchstaben A und B bezeichnet sind.
      (2) Gib die Zahl C an, die genau in der Mitte von A und B liegt.
      (3) Gib die Zahl D so an, dass A in der Mitte von B und D liegt.