AUFGABENGRUPPE A **15.06.2021**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.
Notiere auch deinen Lösungsweg (durch Rechnung oder in Worten).

   a) $(x^4 - 81)^3 \cdot (x^2 - 64)^2 = 0$

   b) $x^2 \cdot (3 + x) - 9 \cdot (3 + x) = 4x - 12$

   c) $(x^5 + 243) \cdot (x + 3)^2 \cdot (x - 3) \geq 0$

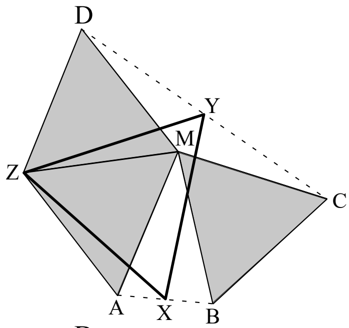
   d) $(x - 3)^5 \cdot (81x^2 + 5)^3 \geq (x - 3)^4$

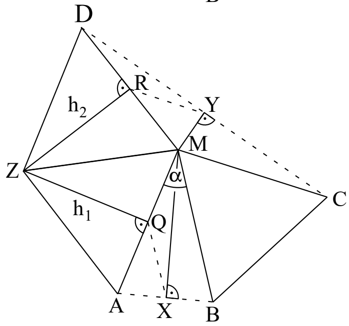
2. a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 4$ cm, $\beta = 35°$ und $a = 1{,}5$ cm $+\ b$.

   b) Konstruiere ein Parallelogramm mit $h_a = 4$ cm, $e = |AC| = 7$ cm und $h_b = 6{,}5$ cm.

   c) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $h_c = 4$ cm, $s_c = 4{,}5$ cm und dem Umkreisradius $r_u = 3{,}5$ cm.

3. In der nebenstehenden Abbildung sind jeweils die grauen Dreiecke (DZM, ZAM und BCM) gleichseitig und kongruent. X ist die Mitte von $\overline{AB}$ und Y die Mitte von $\overline{CD}$. Es soll nun gezeigt werden, dass auch das Dreieck XYZ gleichseitig ist.
Dazu wird in der unteren Abbildung von Z aus die Höhe h_1 im Dreieck ZAM mit dem Fußpunkt Q und die Höhe h_2 im Dreieck ZMD mit dem Fußpunkt R gezeichnet. Der Winkel $\sphericalangle AMB$ sei α. Zeige:





   a) $\sphericalangle QZR = 60°$

   b) R halbiert $\overline{DM}$ und Q halbiert $\overline{AM}$ sowie $|RY| = |QX|$

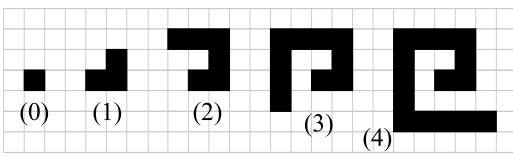
   c) $\sphericalangle MRY = \sphericalangle AQX = \alpha$

   d) Die Dreiecke ZYR und ZXQ sind kongruent.

   e) $\sphericalangle XZY = 60°$

   f) Das Dreieck XYZ ist gleichseitig.

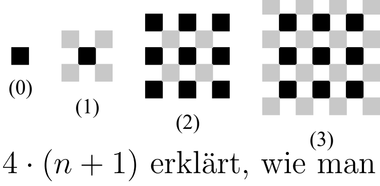
4. a) Nebenstehende Kästchenspiralen entstehen, indem man an ein Kästchen (0) weitere Kästchen in einer Reihe im rechten Winkel gegen den Uhrzeigersinn an das freie Ende der Spirale ansetzt.
Jede nachfolgende Reihe hat ein Kästchen mehr als die vorherige Reihe.



   (1) Gib die Anzahl der Kästchen der Spirale Nr. 10 an.

   (2) Die Spirale Nr. 99 besteht aus 5050 Kästchen.
   Bestimme die Anzahl der Kästchen der Spirale Nr. 100.

   b) Das Bild zeigt Quadratfiguren und deren Bildungsmuster. Die Startfigur Nr. 0 besteht aus einem Kästchen. Die explizite Formel $a_n = 2n^2 + 2n + 1$ gibt die Anzahl der Kästchen der Quadratfigur Nr. n an, die rekursive Formel $a_{n+1} = a_n + 4 \cdot (n + 1)$ erklärt, wie man die Kästchenanzahl einer Quadratfigur aus der Kästchenanzahl der vorigen Figur ermitteln kann.



   (1) Zeige anhand der vier abgebildeten Quadratfiguren die Gültigkeit der expliziten Formel.

   (2) Berechne mit Hilfe der rekursiven Formel die Kästchenanzahl der Quadratfigur Nr. 101 aus der Kästchenanzahl der Figur Nr. 100.

   (3) Zeige mit Hilfe der expliziten Formel die Gültigkeit der rekursiven Formel.

5. a) Bei folgenden Gleichungen fehlt das Rechenzeichen: (1) $\frac{13}{4} \square \frac{13}{9} = \frac{169}{36}$ (2) $\frac{121}{28} \square \frac{11}{7} = \frac{11}{4}$
Finde jeweils beide möglichen Rechenzeichen für $\square$ in (1) und (2) und rechne nach.

Im Folgenden betrachten wir Zahlenpaare $(x|y)$.

b) Setzt man das Zahlenpaar $(2|2)$ in die Gleichung $x + y = x \cdot y$ ein, so gilt: $2 + 2 = 2 \cdot 2$.
   (1) Weise nach, dass auch $(3|\frac{3}{2})$ sowie $(4|\frac{4}{3})$ Zahlenpaare sind, die diese Gleichung lösen.
   (2) Finde zu $x = \frac{5}{2}$ den passenden Wert für y so, dass $(x|y)$ die Gleichung löst.
   Berechne den Wert von $x \cdot y$.
   (3) Bestimme einen Term zur Berechnung von y, der als einzige Variable x enthält.
   Finde mit Hilfe dieses Terms ein neues Zahlenpaar.
   (4) Zeige, dass gilt: $x + y = \frac{x^2}{x-1}$

c) Es gilt: $\frac{4}{2} = 4 - 2$. Dies ergibt sich aus der Gleichung $\frac{y}{x} = y - x$ für das Zahlenpaar $(2|4)$.
Weise durch Umformung der Gleichung nach, dass $y = \frac{x^2}{x-1}$ gilt.

6. Antonia und Toni unternehmen eine Reise nach Tepiu, um dort Blüten von Lianen zur Herstellung einer Medizin zu sammeln.

a) Sie haben am Anfang 28 hellblaue, 28 weiße, 26 blaue, 16 rote und 2 gelbe Blüten in einem Korb gesammelt. Toni zieht mit verbundenen Augen eine Blüte nach der anderen so lange, bis mindestens 9 der gezogenen Blüten sicher die gleiche Farbe haben.
Ermittle die kleinste Anzahl von Blüten, die er ziehen muss, und begründe deine Lösung.

b) Antonia und Toni wiegen ihre Ausbeute: Die roten und die gelben Blüten wiegen zusammen 2,7 kg. Die gelben und die weißen Blüten wiegen zusammen 3,1 kg. Die weißen und die roten Blüten wiegen zusammen 4,2 kg.
Wie viele kg wiegen die roten, die gelben und die weißen Blüten jeweils?

c) Zur Herstellung von 10 g Wirkstoff benötigt man insgesamt 5 kg Blüten. Zur Herstellung von 10 ml Medizin benötigt man 2 Tropfen Wirkstoff. 25 Tropfen wiegen 1 g.
Wie viel Liter Medizin lassen sich aus 8 kg Blüten herstellen?

d) Auf dem Markt von Tepiu wird mit Pings, Pengs und Pongs gezahlt: 4 Pings sind 3 Pengs wert und zwei Pengs sind 5 Pongs wert. Wie viele Pongs sind dann 14 Pings wert?

7. Donald, Tick, Trick und Track haben jeweils 1000 Taler und nehmen an einem Glücksspiel teil. Dabei müssen sie in jeder Runde einen beliebigen Betrag setzen, den sie nicht zurückerhalten, falls sie verlieren. Bei einem Gewinn wird ihnen der doppelte Einsatz ausgezahlt.

a) Donald und Tick spielen drei Runden und setzen in jeder Runde 30 % des ihnen jeweils noch zur Verfügung stehenden Geldes.
   (1) Donald verliert die ersten beiden Runden, die dritte Runde gewinnt er. Berechne den Geldbetrag, den er nach der dritten Runde noch zur Verfügung hat.
   (2) Tick gewinnt die erste Runde, verliert aber die beiden anderen. Berechne den Geldbetrag, den er nach der dritten Runde noch zur Verfügung hat.

b) Donald setzt sein Spiel fort und spielt insgesamt 10 Runden. Er behält die Taktik bei, in jeder Runde 30 % des ihm noch zur Verfügung stehenden Geldes einzusetzen.
   (1) Von den zehn Runden gewinnt Donald fünf. Stelle einen Term zur Berechnung des Geldbetrags auf, den er nach der zehnten Runde noch zur Verfügung hat.
   (2) Begründe, weshalb es für Donalds Geldbetrag nach der zehnten Runde unerheblich ist, welche Runde er jeweils gewonnen bzw. verloren hat.

c) Trick spielt auch zehn Runden, setzt jedoch einen anderen Prozentsatz p des ihm zur Verfügung stehenden Geldbetrags ein. Dadurch erhofft er sich, am Ende mehr als 1000 Taler zur Verfügung zu haben. Begründe, weshalb er bei fünf Gewinnen immer einen Verlust erleidet, egal welchen Wert er für p wählt.

d) Track hat einige Runden gespielt und nun 1562,50 Taler zur Verfügung. Er möchte noch zwei Runden spielen. Welchen Anteil p darf er in jeder Runde maximal setzen, damit er garantiert nicht mit Verlust nach Hause geht?

AUFGABENGRUPPE B **15.06.2021**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Die Grundmenge ist die Menge der ganzen Zahlen. $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$
   a) Gib die Lösungsmenge in aufzählender Form an. $2{,}5 \cdot (-2x^2 + 8) \leq 2x - (5x^2 - 6)$
   b) Löse die Gleichung. $\frac{7}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{2}\right) = x + \frac{11}{2} - \frac{1}{5}x$
   c) Ordne den Gleichungen/Ungleichungen A bis E die passende Lösungsmenge 1 bis 5 zu.

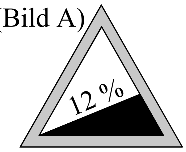
	Gleichung / Ungleichung
A	$x = x^2$
B	$x < x^2$
C	$x > x^2$
D	$-x < x^2$
E	$-x \geq -x^2$

	Lösungsmenge
1	alle ganzen Zahlen
2	alle ganzen Zahlen außer -1 und 0
3	alle ganzen Zahlen außer 0 und 1
4	nur 0 und 1
5	keine ganze Zahl bzw. leere Menge

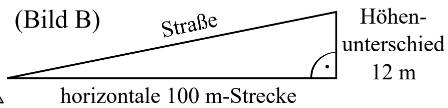
2. a) Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $a = b = 6{,}5$ cm und $h_c = 6{,}0$ cm.
   b) Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $c = 5{,}5$ cm und dem Flächeninhalt $A = 22$ cm^2.
   c) (1) Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $b = c = 7{,}5$ cm und $\alpha = 38°$.
   (2) Zeichne die Höhe h_c in dieses Dreieck ein und benenne den Höhenfußpunkt mit D.
   (3) Berechne die Größe des Winkels $\sphericalangle DCB$. Notiere deine Berechnungen.

3. Steile Anstiege werden auf Verkehrsschildern in Deutschland prozentual angegeben. Die Prozentangabe gibt an, um wie viel Meter auf einer horizontalen 100 m-Strecke die Straße ansteigt.

(Bild A)

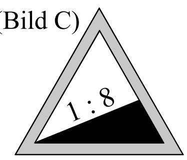


(Bild B)



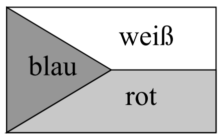
   a) Zeichne ein entsprechendes Bild B für eine 15 %-ige Steigung. Dabei soll die horizontale Länge 12 cm betragen.
   b) Die Steigung einer Straße beträgt 18 %.
   (1) Berechne den Höhenunterschied bei einer horizontalen Strecke von 225 m.
   (2) Berechne die Länge der horizontalen Strecke bei einem Höhenunterschied von 63 m.
   c) Die steilste Straße der Welt ist die 350 m lange „Baldwin Street“ in Neuseeland mit einer Steigung von 35 %. Max behauptet: „Die „Baldwin Street“ steigt um 122,5 m an.“ Hat Max recht? Begründe deine Antwort.

(Bild C)



   d) In Schottland werden die Straßensteigungen teilweise auch als Verhältnis angegeben (siehe Bild C). So bedeutet ein Verhältnis von 1:8, dass bei einer 8 m langen horizontalen Strecke die Straße um 1 m ansteigt.
   (1) Gib das Verhältnis 1:8 in Prozent an.
   (2) Gib eine 16 %-ige Steigung als Verhältnis in der Form $1 : x$ an. Runde x auf Ganze.

4. Die Flagge von Tschechien ist rechteckig und hat laut offizieller Vorgabe ein Seitenverhältnis von *Breite : Höhe = 3 : 2*
Ein Eckpunkt des Dreiecks befindet sich genau im Mittelpunkt der Diagonalen des Rechtecks. Diese Flagge gibt es in verschiedenen Größen.



   a) Zeichne ein Bild dieser Flagge auf dein Reinschriftpapier. Wähle als Breite $b = 6$ cm.
   b) Die Breite einer Flagge beträgt $b = 1{,}8$ m, die Höhe $h = 1{,}2$ m.
   (1) Berechne den Flächeninhalt der Flagge. Gib das Ergebnis in cm^2 an.
   (2) Bestimme die Größen der drei Teilflächen (in cm^2).
   (3) Gib den Anteil jeder der drei Teilflächen an der Gesamtfläche in Prozent an.
   c) Von einer Flagge ist bekannt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks eine Größe von 1350 cm^2 hat. Berechne die Breite und die Höhe dieser Flagge.

5. Die Klasse 8c hat im Februar ein Projekt zum Thema „Fußball und Mathematik“ durchgeführt und sich dabei über die Statistiken der Bundesligasaison 20/21 informiert.

   a) Die Trefferquote gibt an, wie viel Prozent der Torschüsse zu einem Tor geführt haben.

Spieler	Tore	Torschüsse	Trefferquote (in %) / gerundet auf eine Stelle
André Silva		67	24,0
Leonardo Bittencourt	4		12,5
Robert Lewandowski	24	75	
Thomas Müller	10	31	
Moussa Diaby	3	36	8,3
Serge Gnabry	5		

   (1) Wie viele Tore hat André Silva geschossen?
   (2) Wie viele Torschüsse hatte Leonardo Bittencourt?
   (3) Mia sagt: „Lewandowski hat eine höhere Trefferquote als Müller.“ Hat Mia recht? Begründe mit einer Rechnung.
   (4) Moussa Diaby hatte 20 % weniger Torschüsse als Serge Gnabry. Wie viele Torschüsse hatte Gnabry?

   b) Die Spieler von RB Leipzig haben 53 % ihrer Zweikämpfe gewonnen, das waren 2120. Berechne die Anzahl der verlorenen Zweikämpfe.

   c) In allen Hinrundenspielen hatten die Spieler von Mainz 05 insgesamt 9600 Ballkontakte. Die Spieler von Eintracht Frankfurt hatten 21 % mehr Ballkontakte als Mainz 05. Hätten die Spieler von Bayer Leverkusen nur 33 Ballkontakte mehr gehabt, dann wären es 25 % mehr Ballkontakte als bei Eintracht Frankfurt.
   Wie viele Ballkontakte hatte Bayer Leverkusen?

6. Bei den Bundesjugendspielen treten die Klassen einer Jahrgangsstufe gegeneinander im Staffellauf an.

   a) Die Klassen 5a, 5b und 5c treten gegeneinander an. Zähle alle unterschiedlichen Möglichkeiten zur Belegung der Plätze $1-3$ auf.

   b) (1) Vier Klassen der Jahrgangsstufe 8 treten im Staffellauf gegeneinander an.
      (1.1) Wie viele unterschiedliche Belegungen der Plätze $1-3$ gibt es?
      (1.2) In wie vielen Fällen erreicht die Klasse 8a keinen der ersten drei Plätze?
   (2) Fünf Klassen einer Jahrgangsstufe messen sich im Wettkampf. Wie viele unterschiedliche Belegungen der Plätze $1-3$ gibt es nun?

   c) Wie viele Klassen müssten an einem Staffellauf teilnehmen, wenn es zur Belegung der Plätze 1 - 3 insgesamt 720 unterschiedliche Kombinationen gibt?

   d) Pauline behauptet, dass die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten zur Belegung der Plätze 1 - 3 immer eine gerade Zahl ist. Begründe, warum Paulines Behauptung stimmt.

7. Eine Diagonale ist in der Geometrie eine Strecke, die Ecken von Flächen (d. h. von Vielecken) miteinander verbindet, ohne selbst eine Seite der Fläche zu sein.

   a) Zeichne ein beliebiges Fünfeck und zeichne alle Diagonalen ein.

   b) Wie viele Diagonalen besitzt ein Sechseck?

   c) Mit welcher dieser Formeln kann man die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks bestimmen? Dabei gibt die Variable n die Anzahl der Ecken eines Vielecks an.
   A) $\frac{n}{2}$ B) $\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{0{,}5}$ C) $\frac{n\cdot(0{,}5n)}{2}$ D) $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ E) $\frac{n\cdot(n-3)}{0{,}5}$

   d) Gib die Anzahl der Diagonalen im Hunderteck an.

   e) Welches Vieleck besitzt genau 35 Diagonalen?

   f) Es gibt Flächen, bei denen die Diagonalen komplett oder teilweise außerhalb verlaufen. Zeichne ein Sechseck, bei dem genau eine der Diagonalen komplett außerhalb verläuft.

AUFGABENGRUPPE C 15.06.2021

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Berechne x.

   a) (1) $-9x + 11 + 15x + 13 - 2x = 0$
   (2) $16x + 4 \cdot (x - 5) = -60$
   (3) $\frac{1}{4}x = 2$

   b) Gib die beiden Lösungen der nachfolgenden Gleichung an: $x^2 + 12 = 37$

2. In der Pizzeria „Da Salvo" hast du die Möglichkeit in dem Lokal vor Ort zu essen oder das Essen mitzunehmen. In der Tabelle sind die Preise für drei Pizzen aufgeführt. Der Preis einer Pizza setzt sich aus einem Grundpreis in Höhe von 85 % und einer Servicegebühr in Höhe von 15 % zusammen. Die Servicegebühr muss nur bezahlt werden, wenn man die Pizza in der Pizzeria isst.

Pizzeria „Da Salvo" Speisekarte	
Pizza Tonno	7,60 €
Pizza Hawaii	7,80 €
Pizza Mista	9,20 €

   a) Familie Wagner hat in der Pizzeria zwei Pizzen Tonno, zwei Pizzen Hawaii und eine Pizza Mista gegessen. Herr Wagner hat Trinkgeld in Höhe von 3,00 € gegeben.
   Berechne, wie viel Prozent Trinkgeld Herr Wagner gegeben hat.

   b) Uli holt sich eine Pizza Mista in der Pizzeria ab. Dadurch muss er keine Servicegebühr bezahlen. Berechne, wie viel Euro er durch das Abholen spart.

   c) Es soll eine neue Pizza Da Salvo auf der Speisekarte geben. Sie kostet ohne Servicegebühr 11,90 €. Berechne, wie viel Euro diese Pizza mit der Servicegebühr kosten wird.

3. Bei der Freilandhaltung von Hühnern benötigt man Stallfläche und Auslauffläche im Freien.
   Es dürfen auf einem Quadratmeter Stallfläche höchstens 9 Hühner leben.
   Zusätzlich muss jedes Huhn eine Auslauffläche von mindestens 4 m^2 haben.

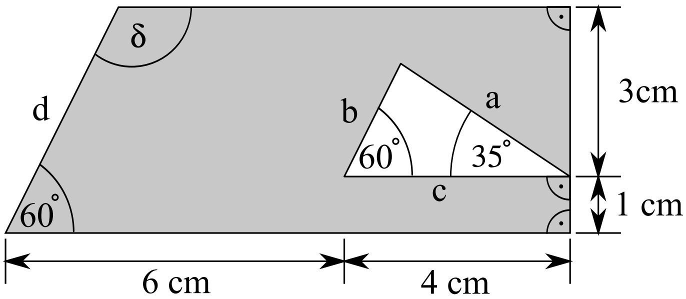
   a) Landwirt Heiko besitzt 2250 Hühner und eine genügend große Auslauffläche.
   Wie groß muss seine Stallfläche mindestens sein, damit er die Hühner unter Bedingungen der Freilandhaltung halten kann?

   b) Landwirt Karl hat einen Stall mit einer Fläche von 67 m^2.
   Wie viel Quadratmeter Auslauffläche müsste Karl für seine Hühner haben, wenn er in seinem Stall die maximale Anzahl an Hühnern unter Bedingungen der Freilandhaltung halten will?

   c) Landwirtin Maria hat eine nutzbare Stallfläche von 87 m^2 und eine Auslaufläche von 2813 m^2.
   Berechne, wie viele Hühner Maria unter den Bedingungen der Freilandhaltung halten darf.
   Notiere einen Antwortsatz.

   d) Landwirtin Doris hat für ihre Hühner eine rechteckige Auslauffläche mit einer Länge von 9,6 m und einer Breite von 3 m. Sie plant eine neue rechteckige Auslauffläche, wobei die Flächengröße beibehalten werden soll. Die Länge der neuen Fläche soll jetzt 6 m sein.
   Berechne, wie breit die neue Auslauffläche sein muss.

4. Die abgebildete Figur ist ein graues Trapez, aus dem ein Dreieck herausgeschnitten wurde.



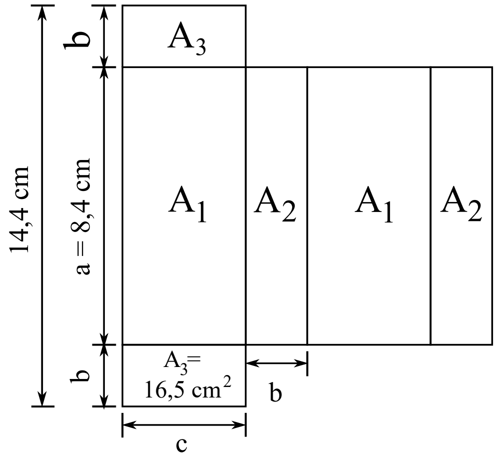
(Zeichnung nicht maßstabsgerecht)

   a) Konstruiere die gesamte Figur mit den angegebenen Maßen.

   b) Berechne die Größe des Winkels δ.

   c) Sind die Seiten b und d parallel zueinander? Begründe deine Antwort.

5. Die Abbildung zeigt ein Quadernetz.



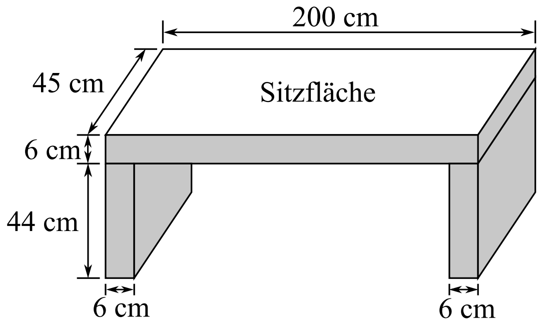
(Zeichnung nicht maßstabsgerecht)

   a) Berechne die fehlenden Längen der Seiten b und c.

   b) Berechne den gesamten Flächeninhalt des abgebildeten Quadernetzes.

   c) Bestimme eine Formel mit den Variablen a, b und c zur Berechnung des Umfangs für ein Quadernetz dieser Form.
      Fasse diesen Term so weit wie möglich zusammen.

6. Tobias plant eine Sitzbank aus Holz. Die Bank soll aus quaderförmigen Holzbrettern gebaut werden. Dafür fertigt er die abgebildete Skizze an und bemaßt sie.



(Zeichnung nicht maßstabsgerecht)

   a) Die gesamte rechteckige weiße Sitzfläche soll gestrichen werden.
      Berechne die Größe der Sitzfläche.

   b) Ein Kubikzentimeter (1 cm^3) des verwendeten Buchenholzes wieg 0,7 g.
      Berechne, wie schwer das Holz für die Bank ist.
      Gib dein Ergebnis in Kilogramm (kg) an.

7. a) In einer Urne sind 24 gleich große Kugeln. Sie unterscheiden sich nur durch ihre Farbe. Es sind rote, blaue und grüne Kugeln. Eine Kugel wird gezogen.
      Gib jeweils an, wie viele rote, blaue und grüne Kugeln in der Urne sein müssen, damit

      (1) jede der drei Farben mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen wird,

      (2) die Farbe rot mit einer doppelt so großen Wahrscheinlichkeit gezogen wird wie die Farbe blau und mit einer doppelt so großen Wahrscheinlichkeit gezogen wird wie die Farbe grün.

   b) In einer anderen Urne sind ebenfalls 24 gleich große Kugeln. Es sind 12 rote, 8 blaue und 4 grüne Kugeln.

      (1) Es wird eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine rote oder eine blaue Kugel zu ziehen?

      (2) Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal eine rote Kugel zu ziehen?

      (3) Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine blaue und eine grüne Kugel zu ziehen?