---

1. a) $\mathbb{L} = \{-8; -3; 3; 8\}$
$(x^4 - 81)^3 = 0$ oder $(x^2 - 64)^2 = 0$
$x^4 - 81 = 0$ oder $x^2 - 64 = 0$
$x^4 = 81$ oder $x^2 = 64$
$x = 3$ oder $x = -3$ oder $x = 8$ oder $x = -8$

b) $\mathbb{L} = \{-5; -1; 3\}$
$(x^2 - 9) \cdot (3 + x) = 4 \cdot (x–3)$
$(x - 3) \cdot (x + 3)^2 = 4 \cdot (x–3)$
$x–3 = 0 \Rightarrow x = 3$ oder
$(x + 3)^2 = 4$
$x + 3 = 2$ oder $x + 3 = -2$
$x = -1$ oder $x = -5$

c) $\mathbb{L} = \{\ldots; -5; -4; -3; 3; 4; 5; \ldots\}$
Fall I: $(x^5 + 243) \cdot (x + 3)^2 \cdot (x - 3) = 0$
$(x^5 + 243) = 0$ oder $(x + 3)^2 = 0$ oder $(x - 3) = 0$
$x^5 = -243$ oder $x + 3 = 0$ oder $(x - 3) = 0$
$x = -3$ oder $x = -3$ oder $x = 3$
Fall II: $(x^5 + 243) \cdot (x + 3)^2 \cdot (x - 3) > 0$
$(x + 3)^2 \geq 0$ gilt immer
$\Rightarrow x^5 + 243 > 0$ und $x - 3 > 0$
oder $x^5 + 243 < 0$ und $x - 3 < 0$
$x^5 > -243$ und $x > 3$ oder $x^5 < -243$ und $x < 3$
$x > -3$ und $x > 3$ oder $x < -3$ und $x < 3$
$x > 3$ oder $x < -3$

d) $\mathbb{L} = \{3; 4; 5; \ldots\}$
Fall I: $(x - 3)^4 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
Fall II: $(x - 3)^4 > 0$
$\Rightarrow (x - 3) \cdot (81x^2 + 5)^3 \geq 1$
$(81x^2 + 5)^3 \geq 5^3 = 125$ gilt immer
$x - 3 > 0$
$x > 3$

---

2. a) Hinweise zur Konstruktion des Dreiecks ABC
Zeichnen von $|AB| = c = 4$ cm und Antragen von $\beta = 35°$
Abtragen von 1,5 cm
am freien Schenkel (Punkt D)
Einzeichnen der Mittelsenkrechten m_{AD}
Schnitt von m_{AD} und freiem Schenkel von β

b) Konstruktion des Parallelogramms $ABCD$
Zeichnen des Parallelstreifens im Abstand $h_a = 4$ cm
Einzeichnen der Diagonalen
mit Länge $|AC| = e = 7$ cm
Kreis k_A um A mit Radius $r = h_b = 6{,}5$ cm

		Thaleskreis um M_{AC} mit Radius 3,5 cm schneidet k_A in P Gerade durch P und C schneidet Parallelstreifen in B
	c)	Konstruktion des Dreiecks ABC Zeichnen des Parallelstreifens im Abstand $h_c = 4$ cm und Festlegen des Punktes C Kreis mit Radius $r = s_c = 4{,}5$ cm schneidet Parallelstreifen im Punkt S Gerade m_{AB} durch S senkrecht zum Parallelstreifen Kreis k um C mit Radius r $= r_u = 3{,}5$ cm schneidet m_{AB} im Umkreismittelpunkt M Umkreis durch M schneidet Parallelstreifen in A und B
3.	a)	Jede Höhe halbiert die Winkel im gleichseitigen Dreieck. Deswegen ist $\sphericalangle MZR = \sphericalangle QZM = 30°$
	b)	Jede Höhe halbiert eine Seite im gleichseitigen Dreieck. Thaleskreis über $\overline{DM}$ bzw. $\overline{MA}$
	c)	Dreieck AXQ und Dreieck MYR sind gleichschenklig: $\lvert AQ\rvert = \lvert QX\rvert = \lvert MR\rvert = \lvert RY\rvert$ Sie sind auch kongruent: Dreieck AXQ: $\overline{MX}$ halbiert α. Mit der Winkelsumme in diesem Dreieick: $\sphericalangle XAM = 90° - \frac{\alpha}{2}$ Dreieck MYR: Winkelsumme um M herum: $\sphericalangle CMD = 360° - 3 \cdot 60° - \alpha = 180° - \alpha$, $\overline{MY}$ halbiert diesen Winkel. Mit der Winkelsumme in diesem Dreieick: $\sphericalangle YMR = 90° - \frac{\alpha}{2}$
	d)	SWS: $h_1 = h_2$ $\overline{RY} = \overline{QX}$ $\sphericalangle ZRY = \sphericalangle ZQX = 90° + \alpha$
	e)	Drehen des Dreiecks ZYR um 60° führt auf Dreieck ZXQ. Mit a) und d) gilt: $\sphericalangle YZQ = \sphericalangle XZY = 60°$
	f)	SWS mit e)
4.	a) (1)	$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15 \xrightarrow{+6} 21 \xrightarrow{+7} 28 \xrightarrow{+8} 36 \xrightarrow{+9} 45 \xrightarrow{+10} 55 \xrightarrow{+11} 66$ (Nutzung des Bildungsgesetzes)
	(2)	Erkennen des rekursiven Bildungsgesetzes und Anwendung: $s_{n+1} = s_n + (n+2)$ und $n = 99 \Rightarrow s_{100} = 5050 + 101 = 5151$
	b) (1)	$n = 0 : a_0 = 1 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 1$ $n = 1 : a_1 = 1 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$ $n = 2 : a_2 = 1 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 13$ $n = 3 : a_3 = 1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 25$
	(2)	20 605 $a_{100} = 1 + 2 \cdot 100^2 + 2 \cdot 100 = 1 + 20\,000 + 200 = 20\,201$ $a_{101} = a_{100} + 4 \cdot (100 + 1) = 20\,201 + 404$
	(3)	vollständiger Nachweis $a_{n+1} = 1 + 2(n+1)^2 + 2(n+1)$ $= 1 + 2(n^2 + 2n + 1) + 2(n+1)$ $= (2n^2 + 2n + 1) + (4n + 4)$

$= a_n + 4(n+1)$

---

5. a) (1) $\frac{13}{4} \cdot \frac{13}{9} = \frac{169}{36}$ und $\frac{13}{4} + \frac{13}{9} = \frac{117}{36} + \frac{52}{36} = \frac{169}{36}$

(2) $\frac{121}{28} : \frac{11}{7} = \frac{121}{28} \cdot \frac{7}{11} = \frac{11}{4}$ und $\frac{121}{28} - \frac{11}{7} = \frac{121}{28} - \frac{43}{28} = \frac{77}{28} = \frac{11}{4}$

b) (1) $3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ und $3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

$4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$ und $4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$

(2) $\frac{5}{2} + y = \frac{5}{2} \cdot y \rightarrow \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \cdot y \rightarrow y = \frac{5}{3}$

$\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{6}$

(3) $y = \frac{x}{x-1}$

z. B. $\left(5 \middle| \frac{5}{4}\right)$

(4) $x \cdot y = x \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$

c) $\frac{y}{x} = y - x$

$y = xy - x^2$

$x^2 = xy - y = y(x-1)$

$y = \frac{x^2}{x-1}$

---

6. a) 35 Blüten (mit Begründung)

Zieht Toni 8 hellblaue, 8 weiße, 8 blaue, 8 rote und die 2 gelben Blüten heraus (also insgesamt 34 Stück), so sind unter ihnen keine 9 Stück mit der gleichen Farbe.

Zieht er eine Blüte mehr, so muss diese hellblau, weiß, blau oder rot sein.

Die kleinste Anzahl von Blüten ist also 35.

b) r=1,9; g=0,8 und w=2,3

Aus $r + g = 2{,}7$ und $w + g = 3{,}1$ folgt $w = 0{,}4 + r$.

Mit $r + w = 4{,}2$ folgt $r + (0{,}4 + r) = 4{,}2$.

Es gibt alternative Lösungswege.

c) 2 Liter

5 kg Blüten ergeben 10 g Wirkstoff.

Damit ergeben 8 kg Blüten 16 g Wirkstoff.

1 g Wirkstoff entspricht 25 Tropfen,

damit entsprechen 16 g Wirkstoff 400 Tropfen.

2 Tropfen Wirkstoff ergeben 10 ml Medizin.

Damit ergeben 400 Tropfen Wirkstoff 2 Liter Medizin.

d) 26,25 Pongs

z. B.

Mit 4 Pings = 3 Pengs sind 2 Pings = 1,5 Pengs.

Mit 2 Pengs = 5 Pongs sind 1,5 Pengs = 3,75 Pongs.

Mit 2 Pings = 3,75 Pongs sind 14 Pings = 26,25 Pongs.

---

7. a) (1) 637 Taler

1000 Taler $\cdot\, 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}3$

(2) 637 Taler

1000 Taler $\cdot\, 1{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7$

b) (1) 1000 Taler $\cdot 1{,}3^5 \cdot 0{,}7^5$ ($\approx$ 624,03 Taler)

(2) Die Faktoren im Term sind vertauschbar (Kommutativgesetz der Multiplikation).

c) Da $0 < p < 1$, gilt auch $0 < p^2 < 1$ und somit $0 < (1-p^2)^5 < 1$.

1000 Taler $\cdot\, (1+p)^5 \cdot (1-p)^5$

1000 Taler $\cdot\, [(1+p)(1-p)]^5$

$1000 \text{ Taler} \cdot (1-p^2)^5$

d) Er darf maximal 20 % pro Runde einsetzen.
$1562{,}50 \text{ Taler} \cdot (1-p)^2 \geq 1000 \text{ Taler}$
$(1-p)^2 \geq 0{,}64$
$1-p \geq 0{,}8$
$p \leq 0{,}2$

MATHEMATIK-WETTBEWERB DES LANDES HESSEN 2020/2021 3. RUNDE

LÖSUNGEN AUFGABENGRUPPE B

---

1. a) $\mathbb{L} = \{7; 8; 9; \ldots\}$
$-5x^2 + 20 \leq 2x - 5x^2 + 6$
$14 \leq 2x$
$x \geq 7$

b) $x = 15$ oder $\mathbb{L} = \{15\}$
$\frac{14}{15}x + \frac{7}{2} = \frac{4}{5}x + \frac{11}{2}$
$\frac{2}{15}x = 2$
$2x = 30$

c) A4; B3; C5; D2 und E1

---

2. a) Hinweise zur Konstruktion des Dreiecks ABC mit Beschriftung der Eckpunkte.
Zeichnen von zwei Parallelen im Abstand 6 cm
Einzeichnen des Punktes C
Kreisbogen um C mit $r = 6{,}5$ cm
Einzeichnen des Punktes A
Einzeichnen des Punktes B

b) Konstruktion des Dreiecks ABC mit Beschriftung der Eckpunkte.
Zeichnen der Seite $c = 5{,}5$ cm
Bestimmen der Höhe $h_c = 8{,}0$ cm
Errichten von h_c im Mittelpunkt der Seite c

c) (1) Konstruktion des Dreiecks ABC mit Beschriftung der Eckpunkte
Zeichnen der Seite $c = 7{,}5$ cm
Antragen von $\alpha = 38°$
Abtragen der Seite $b = 7{,}5$ cm

(2) Zeichnen der Höhe h_c und Eintragen vom Punkt D
Zeichnen der Höhe h_c

(3) Berechnung des Winkels $\sphericalangle DCB = 19°$
Berechnung des Winkels $\sphericalangle ACD = 90° - 38° = 52°$
Berechnung des Winkels $\sphericalangle ACB = (180° - 38°) : 2 = 71°$
Winkel $\sphericalangle DCB = 71° - 52°$

---

3. a) korrekte Zeichnung
$h = 1{,}8$ cm

b) (1) 40,5 m Höhenunterschied
18 m Höhe über 100 m

4,5 m Höhe über 25 m

(2) 350 m

63 : 18 = 3,5

c) Max hat nicht recht, mit entsprechender Begründung:

z. B.

„Es wären 122,5 m bei 350 m horizontaler Strecke (diese ist aber kürzer als die Länge der Straße).“

d) (1) 12,5 % Steigung

z. B.

8 m (horizontal) entsprechen 1 m (Höhe).

1 m (horizontal) entspricht 0,125 m (Höhe).

100 m (horizontal) entsprechen 12,5 m (Höhe).

(2) 1 : 6

z. B.

100 m (horizontal) entsprechen 16 % Steigung.

100 m (horizontal) entsprechen 16 m (Höhe).

6,25 m (horizontal) entsprechen 1 m (Höhe).

6,25 m $\approx$ 6 m

---

4. a) korrekte Zeichnung

$h = 4$ cm oder eingetragenes Dreieck

b) (1) 21600 cm^2

$A = b \cdot h = 1{,}8 \text{ m} \cdot 1{,}2 \text{ m}$

$A = 2{,}16 \text{ m}^2$

(2) $A(\text{blau}) = 0{,}54 \text{ m}^2 = 5400 \text{ cm}^2$

$A(\text{blau}) = 1{,}2 \text{ m} \cdot 0{,}9 \text{ m} : 2$

$A(\text{weiß}) = A(\text{rot}) = 0{,}81 \text{ m}^2 = 8100 \text{ cm}^2$ (je 1,0)

$A(\text{weiß}) = [A(\text{gesamt}) - A(\text{blau})] : 2$

(3) A(blau) = 25 %

$\frac{1}{4}$

$A(\text{weiß}) = A(\text{rot}) = 37{,}5$ %

$\frac{3}{8}$

c) b = 90 cm, h = 60 cm

z. B.:

$A(\text{gesamt}) = 4 \cdot A(\text{Dreieck}) = 4 \cdot 1350 \text{ cm}^2$

$5400 \text{ cm}^2 = b \cdot h$

$5400 \text{ cm}^2 = (1{,}5 \cdot h) \cdot h$

$5400 \text{ cm}^2 = 1{,}5 \cdot h^2$

$h^2 = 3600 \text{ cm}^2$

---

5. a) (1) 16 Tore

(2) 32 Schüsse auf das Tor

(3) „Mia hat nicht recht.“ mit entsprechender Begründung.

Lewandowski: 24 : 75 $\cdot$ 100 = 32 %

Müller: 10 : 31 $\cdot$ 100 = 32,258 …% (32,3 %)

oder: 750 : 2325 > 744 : 2325

Müller hatte eine höhere Trefferquote.

(4) 45 Torschüsse

36 Torschüsse sind 80 %

36 : 0,8

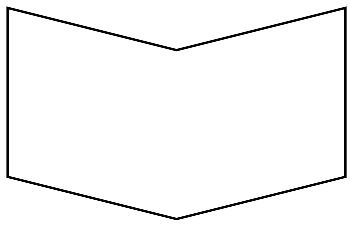
b) 1880
$2120 : 53 \cdot 100 = 4000$
$4000 - 2120$
c) 14487
$9600 \cdot 1{,}21 = 11616$
$11616 : 4 = 2904$
$2904 \cdot 5 = 14520$
$14520 - 33$

---

6. a) abc; acb; bac; bca; cab; cba
b) (1.1) 24 $(= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!)$
(1.2) 6 $(= 24 : 4)$
(2) 60 $(= 5 \cdot 4 \cdot 3)$
c) 10 (denn $720 = 10 \cdot 9 \cdot 8$)
d) Begründung
Bei drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist mindestens eine Zahl gerade.
Multipliziert man mit einer geraden Zahl, ist das Produkt ebenfalls gerade.

---

7. a) richtige Zeichnung mit allen 5 Diagonalen
b) 9
c) D
d) 4850 $(= 10 \cdot 7 : 2 = 35)$
e) 10-Eck
f) korrekte Zeichnung
z. B.



(Das Sechseck benötigt genau einen überstumpfen Innenwinkel.)

---

1. a) (1) $x = -6$
$4x + 24 = 0$
$4x = -24$
(2) $x = -2$
$16x + 4x - 20 = -60$
$20x - 20 = -60$
$20x = -40$
(3) $x = 8$
b) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$
$x^2 = 25$

---

2. a) 7,5 %
2 · 7,60 € + 2 · 7,80 € + 9,20 €
= 40 €
40 € entsprechen 100 %.
1 € entspricht 2,5 %.
3 € entsprechen 7,5 %.
b) 1,38 €
z. B.
100 % entsprechen 9,20 €.
1 % entspricht 0,92 €.
85 % entsprechen 7,82 €.
9,20 € − 7,82 €
c) 14 € (entsprechen 100 %)
z. B.
85 % entsprechen 11,90 €.
1 % entspricht 0,14 €.

---

3. a) 250 m^2
2250 Hühner : 9 Hühner/m^2
b) 2412 m^2
67 m^2 · 9 Hühner/m^2
= 603 Hühner
603 Hühner · 4 m^2/Huhn
c) korrekte Antwort, z. B. „Maria darf 703 Hühner halten.“
87 m^2 · 9 Hühner/m^2
= 783 Hühner (im Stall)
2813 m^2 : 4 m^2/Huhn
= 703,25 Hühner (im Auslauf)
d) 4,8 m
$A = 9{,}6 \text{ m} \cdot 3 \text{ m}$
= 28,8 m^2
28,8 m^2 : 6 m

4.	a)	korrekte Konstruktion der gesamten Figur z. B. Zeichnen der Trapezseite $a = 10$ cm Antragen des 60°-Winkels im Trapez Zeichnen der Trapezseite $b = 4$ cm Zeichnen der zu a parallelen Trapezseite c Zeichnen der zur Trapezseite a parallelen Dreiecksseite $c = 4$ cm Antragen des 60°-Winkels im Dreieck Antragen des 35°-Winkels im Dreieck und Vervollständigen zum Dreieck
	b)	$\delta = 120°$ $360° - 60° - 2 \cdot 90°$
	c)	korrekte Antwort („Die beiden Seiten sind parallel zueinander.“) mit korrekter Begründung z. B. „Die beiden Winkel sind 60° und die Seite c des Dreiecks ist parallel zur längsten Seite im Trapez.“
5.	a)	$b = 3$ cm 14,4 cm − 8,4 cm = 6 cm 6 cm : 2 $c = 5{,}5$ cm 16,5 cm^2 : 3 cm
	b)	$A_{\text{gesamt}} = 175{,}8$ cm^2 5,5 cm · 2 + 3 cm · 2 = 17 cm $2A_1 + 2A_2 = 17$ cm · 8,4 cm = 142,8 cm^2 $2A_3 = 16{,}5$ cm^2 · 2 = 33 cm^2 $A_{\text{gesamt}} = 142{,}8$ cm^2 + 33 cm^2
	c)	$u = 2a + 8b + 4c$ z. B. $u = a + b + c + b + b + c + b + a + b + c + b + b + c + b$
6.	a)	A = 9000 cm^2 $A = 45$ cm · 200 cm
	b)	Masse = 54,432 kg $V_1 = 9000$ cm^2 · 6 cm $V_1 = 54\,000$ cm^3 $V_2 = 44$ cm · 45 cm · 6 cm $V_2 = 1980$ cm^2 · 6 cm $V_2 = 11\,880$ cm^3 $V = V_1 + 2 \cdot V_2 = 54\,000$ cm^3 + 2 · 11 880 cm^3 $V = 77\,760$ cm^3 Masse = 77 760 cm^3 · 0,7 g/cm^3 Masse = 54 432 g
7.	a) (1)	jeweils 8 Kugeln
	(2)	rote Kugeln: 12

$24 : 4 = 6$
blaue Kugeln: 6
grüne Kugeln: 6

b) (1) $P = \frac{20}{24} \left(= \frac{5}{6}\right)$

(2) $P(\text{rot,rot}) = \frac{144}{576} \left(= \frac{1}{4}\right)$

$P(\text{rot}) = \frac{12}{24} \left(= \frac{1}{2}\right)$

$P(\text{rot,rot}) = \frac{12}{24} \cdot \frac{12}{24} \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$

(3) $P(\text{blau, grün}) = \frac{64}{576} \left(= \frac{1}{9}\right)$

$P(\text{blau}) = \frac{8}{24}$

$P(\text{grün}) = \frac{4}{24}$

$P(\text{blau,grün}) = \frac{8}{24} \cdot \frac{4}{24}$

$P(\text{grün,blau}) = \frac{4}{24} \cdot \frac{8}{24}$

$P(\text{blau und grün}) = \frac{8}{24} \cdot \frac{4}{24} + \frac{4}{24} \cdot \frac{8}{24}$