AUFGABENGRUPPE A — 09.03.2022

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

   a) $16 \cdot (x-4)^2 = (4x-16) \cdot (4x+16)$

   b) $5 \cdot (4-x)^2 = 4 \cdot (4-x)^2 + (x-4)^2$

   c) $4x \cdot (x^2-4) \cdot (x+4)^2 < 0$

   d) $(4x-16)^4 = 256$

2. a) Im Dreieck ABC schneiden sich die Mittelsenkrechten m_a und m_b auf der Seite $\overline{AB}$.

   (1) Konstruiere das Dreieck ABC mit $b = 6{,}2$ cm und $\alpha = 37°$.

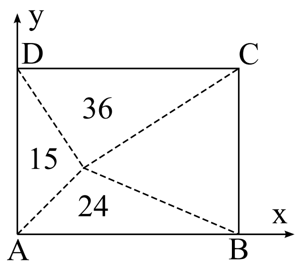
   (2) Berechne die Winkel β und γ und begründe deine Angaben.

   b) Im Dreieck ABC schneiden sich die Mittelsenkrechten m_b und m_c sowie die Winkelhalbierende w_α im Punkt M.

   (1) Konstruiere das Dreieck ABC mit $\alpha = 73°$ und $|AM| = 5{,}6$ cm.

   (2) Berechne die Winkel β und γ und begründe deine Angaben.

3. In einem Koordinatensystem (1 cm $\hat{=}$ 1 Längeneinheit) bilden die Punkte $A(0|0)$, $B(x|0)$, $C(x|y)$ und $D(0|y)$ ein Rechteck. Der Punkt E liegt innerhalb des Rechtecks und wird mit jedem Eckpunkt des Rechtecks verbunden, so dass es in vier Dreiecke unterteilt wird. Dabei gilt für die Größen der Flächeninhalte der Dreiecke: $A_{ABE} = 24$ cm²; $A_{AED} = 15$ cm²; $A_{CDE} = 36$ cm².



   a) Bestimme den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$.

   b) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks BCE.

   c) Es sei nun $E(2|6)$. Bestimme die Koordinaten von B und D.

   d) Es sei nun $x = 10$ und $y = 12$. Bestimme die Koordinaten von E.

   e) Zeige, dass das Produkt der Koordinaten von E stets 12 ist.

4. Mit fünf Flaschen A, B, C, D und E werden Umfüllexperimente durchgeführt. Die Flaschen A, B und C haben das gleiche Volumen. Das Volumen der Flasche D ist eineinhalb Mal so groß wie das der Flasche A. Die Flasche A ist zu Beginn jedes Experimentes immer zu 30 % gefüllt, die Flasche B immer zu 50 %. C ist anfangs leer.

   a) Zu wie viel Prozent ist die Flasche C gefüllt, wenn

   (1) die Inhalte der Flaschen A und B jeweils komplett in die leere Flasche C umgefüllt werden?

   (2) nur jeweils 80 % der Inhalte der Flaschen A und B in die leere Flasche C umgefüllt werden?

   (3) 90 % des Inhalts der Flasche A und 10 % des Inhalts der Flasche B in die leere Flasche C umgefüllt werden?

   b) Die Inhalte der Flaschen A und B werden komplett in die leere Flasche D umgefüllt. Zu wie viel Prozent ist die Flasche D gefüllt?

   c) Im nächsten Experiment soll der Inhalt der Flasche E komplett in die leere Flasche D umgefüllt werden. E ist zur Hälfte gefüllt, jedoch ist das Fassungsvermögen von E unbekannt. D ist nach dem Umfüllen zu 60 % gefüllt.

   (1) Bestimme, wie viel mal das Volumen von E größer ist als das von A.

   (2) Zu wie viel Prozent darf E höchstens gefüllt sein, damit die Flasche D beim Umfüllen nicht überläuft?

   d) Im letzten Experiment werden Inhalte der Flaschen A und B in die leere Flasche D umgefüllt. Diese ist danach zu 34 % gefüllt. Wie viel Prozent des Inhalts aus Flasche A bzw. Flasche B können dazu in Flasche D gefüllt worden sein? Gib eine Möglichkeit an.

5. a) Man bestimmt seine (einstellige) Glückszahl mit Hilfe der Quersumme (QS) seines Geburtsdatums folgendermaßen:

   Beispiel: 14.11.2008 hat die Glückszahl 8.

   $QS_1(14112008) = 1+4+1+1+2+0+0+8 = 17$
   $QS_2(14112008) = QS_1(17) = 8$

   Man bildet so lange die Quersumme, bis das Ergebnis einstellig ist.

   (1) Bestimme die Glückszahl für das Geburtstdatum 31.12.2021.
   (2) Eine Glückszahl ist 4. Gib dafür vier mögliche Geburtsdaten zwischen dem 01.01.2007 und dem 31.12.2007 an.
   (3) Bei welchem Datum aus dem Jahr 2007 muss man dreimal eine Quersumme bilden, um auf die Glückszahl zu kommen? Gib vier Möglichkeiten an.
   (4) Welches Datum im Jahr 2007 ergibt die größtmögliche Glückszahl? Gib zwei Möglichkeiten an.

   b) Wir betrachten im Folgenden Daten ohne Jahreszahl.
   Das Querprodukt (QP) sei das Produkt aller Ziffern einer Zahl, die ungleich Null sind.

   Beispiel: Für das Datum 04.02. ist $\text{QP}(0402) = 4 \cdot 2 = 8$

   (1) Welche Daten haben das Querprodukt 7? Gib vier Möglichkeiten aus vier verschiedenen Monaten an.
   (2) Es gibt Daten, bei denen die Glückszahl gleich dem Querprodukt ist.

   Beispiel: 02.02. $\quad 2+2 = 2 \cdot 2$

   Finde weitere Daten, bei denen dies der Fall ist, wenn darin vorkommen:

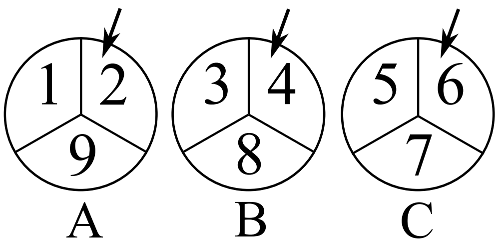
   (2.1) genau zwei Nullen - gib eine Möglichkeit an.

   (2.2) genau eine Null - gib fünf Möglichkeiten an.

   (2.3) keine Nullen - gib zwei Möglichkeiten an.

6. Auf drei Glücksräder A, B und C mit je drei gleich großen Sektoren werden die Ziffern von 1 bis 9 verteilt. Stella wählt immer zuerst eines der drei Räder aus und dreht es. Danach wählt Jannick ein anderes und dreht ebenfalls. Es gewinnt, wer die höhere Zahl erhält.

   a) Die Räder sind wie nebenstehend beschriftet.

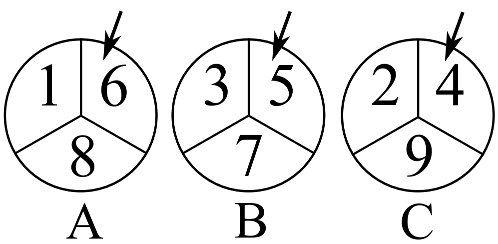


   (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Stella gegen Jannick gewinnt, wenn sie folgendermaßen wählen:

   (1.1) Stella Rad A und Jannick Rad B
   (1.2) Stella Rad B und Jannick Rad C
   (1.3) Stella Rad C und Jannick Rad A

   (2) Stella möchte gerne gewinnen.
   Welches Rad ist für Stella wohl die beste Wahl, welches die schlechteste?

   b) Die Räder sind wie nebenstehend beschriftet. Stella sagt: „Ich weiß gar nicht, welches Rad ich nehmen soll .“



   (1) Wie kannst du ihr helfen? Begründe.

   (2) Jannick behauptet: „Ich kann als Zweiter mein Rad immer so wählen, dass ich eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit habe.“
   Hat er recht? Begründe.

MATHEMATIK-WETTBEWERB DES LANDES HESSEN 2021/2022 — 2. RUNDE

AUFGABENGRUPPE B — 09.03.2022

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.
   (1) $6 \cdot (3x - 2) = 10x - (2 - 3x)$
   (2) $2{,}5x + 1 \leq 2x - 1$

   b) (1) Gib für a, b und c in der nebenstehenden Tabelle jeweils eine passende Zahl an.

x	y	z	$3x + 2y - z$
1	2	3	$= a$
b	6	0	$= 0$
$\frac{1}{3}$	c	-1	< 0

   (2) In der Gleichung $3x + 2y - z = d$ sind die Variablen x und y kleiner als Null aber z ist größer als Null. Welche der drei Aussagen gilt für d? Notiere den Lösungsbuchstaben.

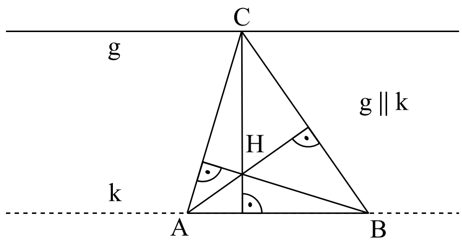
   A: d ist größer als Null
   B: d ist gleich Null
   C: d ist kleiner als Null

2. a) Konstruiere das gleichschenklige Dreieck ABC (Basis c) mit der Höhe $h_c = 5$ cm und $\alpha = 70°$.

   b) Konstruiere das gleichseitige Dreieck ABC mit der Höhe $h_c = 5$ cm.

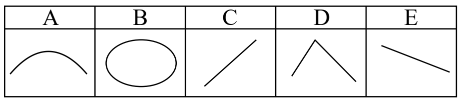
   c) Zeichne je ein Dreieck mit $h_c = 5$ cm und $A = 15$ cm^2, das
   (1) spitzwinklig
   (2) rechtwinklig
   (3) stumpfwinklig
   ist.

   d) Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Dreieck ABC mit den drei Höhen und deren Höhenschnittpunkt H.
   Der Punkt C soll auf der Geraden g verschoben werden.



   (1) Gib zwei Möglichkeiten für die Lage von C an, sodass der Höhenschnittpunkt unterhalb von k liegt.

   (2) Welche Form hat die Linie, auf der die Höhenschnittpunkte aller bei d) (1) möglichen Dreiecke liegen? Schreibe den Lösungsbuchstaben aus der Tabelle auf dein Reinschriftpapier.



3. Sudoku ist ein Knobelspiel. Den Spielregeln nach müssen alle Felder so mit Ziffern von 1 bis n ausgefüllt werden, dass in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jedem rechteckigen Block (durch verdickte Linien markiert) jede Ziffer genau einmal vorkommt. Die Abbildung zeigt ein Beispiel für ein fertig ausgefülltes 4×4-Sudoku mit den Ziffern von 1 bis 4.

2	**3**	**4**	*1*
4	*1*	*3*	**2**
1	*4*	*2*	**3**
3	**2**	**1**	*4*

   a) Übertrage das nebenstehende 4×4-Sudoku auf dein Reinschriftpapier und ergänze die freien Felder mit Ziffern von 1 bis 4. Gib zwei Möglichkeiten an.

	1	**4**	
	4	**1**	
1		**3**	

   b) Die Abbildung zeigt ein 6×6-Sudoku für die Ziffern 1 bis 6 in 2×3 Blöcken. Löse das Sudoku und schreibe auf, welche Ziffern für die Variablen a, b, c und d eingesetzt werden müssen.

	5		c		**3**
	a	**6**		**4**	
d	**2**		**4**		
			3		
3	**1**		**6**		**5**
	6				b

   c) Zeichne ein leeres 6×6-Sudoku wie in b) auf dein Reinschriftpapier und trage in die Felder der oberen Zeile von links nach rechts die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 ein. Fülle alle freien Felder mit Ziffern von 1 bis 6 aus, sodass ein von b) verschiedenes Sudoku entsteht.

4. a) (1) Zeichne das Dreieck ABC mit $A(0|2)$, $B(6|2)$ und $C(4|6)$ in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm ein.
   (2) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
   b) (1) Verschiebe das Dreieck ABC so, dass $A'(-2|2)$ der Bildpunkt von A ist. Benenne die Bildpunkte von B und C mit B' und C' und gib jeweils deren Koordinaten an.
   (2) Bestimme den Flächeninhalt des Parallelogramms $A'ACC'$.
   (3) Bestimme den Flächeninhalt des Trapezes $A'BCC'$.
   c) Bei einer entsprechenden Verschiebung des Dreiecks ABC sind A^*, B^* und C^* die Bildpunkte von A, B und C. Wie weit müsste das Dreieck ABC in x-Richtung nach links verschoben werden, damit das Trapez A^*BCC^* einen Flächeninhalt von 36 cm^2 hat?

5. Elektroautos werden unterteilt in Autos mit reinem Elektroantrieb (E-Autos) und Autos mit Elektroantrieb und Verbrennungsmotor (Plugin-Hybride).

   a) Im Jahr 2021 wurden in Deutschland mehr Elektroautos zugelassen als Dieselautos, vermeldete das Kraftfahrt-Bundesamt. Bis Ende Juli waren es 361 150 Dieselautos.
   Die Zahl der zugelassenen Elektroautos im gleichen Zeitraum lag 2 % darüber.
   Wie viele Elektroautos wurden im gleichen Zeitraum zugelassen?
   b) Von den 193 000 im August zugelassenen Autos waren 28 950 E-Autos.
   Wie viel Prozent waren das?
   c) Von Januar bis August 2021 wurden in Deutschland 203 040 E-Autos verkauft.
   Das waren 60 % mehr als im Vergleich zum Vorjahreszeitraum.
   Wie viele E-Autos wurden im gleichen Zeitraum 2020 verkauft?
   d) In den nächsten Jahren werden die jährlichen Neuzulassungen von Elektroautos steigen.
   Im Jahr 2025 rechnet man mit 585 000 E-Autos und 315 000 Plugin-Hybriden.
   Stelle den Anteil der E-Autos und der Plugin-Hybride an den Elektroautos in einem Kreisdiagramm ($r = 5$ cm) dar.
   e) Die Reichweite ist ein wichtiges Kriterium für den Kauf eines E-Autos.
   Der Spitzenreiter kommt auf 785 km und somit 18 % weiter als der Zweitplatzierte.
   Linus behauptet: „Mit dem Spitzenreiter kommt man ca. 120 km weiter als mit dem Zweitplatzierten.“ Hat er recht? Begründe rechnerisch. Runde auf ganze Kilometer.

6. In Mikes Fastfood-Tempel bestehen Menüs aus einer Vorspeise, einer Hauptspeise und einer Nachspeise.

Vorspeise	Hauptspeise (mit Pommes)	Nachspeise
Tomatensuppe (T)	Döner (D)	Schokopudding (S)
Gemischter Salat (G)	Currywurst (C)	Wackelpudding (W)
Kräuterbaguette (K)	Nuggets (N)	
	Veggieburger (V)	

   a) (1) Jonny wählt als Vorspeise eine Tomatensuppe. Gib alle unterschiedlichen Kombinationen der Menüs an, die Jonny noch zur Auswahl hat. Nutze in deiner Antwort die Abkürzungen aus der Tabelle.
   (2) Joey möchte weder Kräuterbaguette noch Döner mit Pommes in seinem Menü haben. Gib die Anzahl der unterschiedlichen Menükombinationen an.
   b) Mike möchte seine Speisekarte um genau eine Speise erweitern.
   (1) Sollte Mike eine Vor-, eine Haupt- oder eine Nachspeise hinzufügen, um möglichst viele weitere Menüs zu erhalten?
   (2) Wie viele Menüs hat Mike jetzt maximal im Angebot?
   c) Für einen Spezialevent am Freitag, dem 13., möchte Mike, dass seine Gäste genau 13 Menükombinationen haben. Dabei sollen die Gäste jedoch immer die Auswahl aus mindestens zwei Vorspeisen und mindestens zwei Hauptspeisen haben. Als Nachspeise soll es an diesem Tag nur Eis geben.
   (1) Begründe, warum Mikes Idee nicht umsetzbar ist.
   (2) Gib die nächstgrößere Anzahl aller Menükombinationen an, die unter diesen Bedingungen ebenfalls nicht umsetzbar ist.

AUFGABENGRUPPE C **09.03.2022**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Berechne den Wert des Terms $5x + 3y$ für $x = 5$ und $y = -3$.

   b) Fasse den Term $2x + 7 + 6y - 6x + y$ so weit wie möglich zusammen.

   c) Berechne x.

   (1) $7x + 36 = 4x - 12$

   (2) $50 + 26x + 57 = 20x + 94 - 7x$

2. Eine Klasse mit 28 Jugendlichen macht einen Tagesausflug. Die Klasse wird von zwei Lehrerinnen begleitet.

   a) Das Busunternehmen verlangt für die Busfahrt einen Pauschalpreis. Das bedeutet, dass der Gesamtpreis gleichbleibt, egal wie viele Personen mitfahren.
   Timo berechnet, dass jeder Jugendliche der Klasse für die Busfahrt 12 € bezahlt.
   Er hat dabei vergessen, dass sich die zwei Lehrerinnen ebenfalls an den Fahrtkosten beteiligen.
   Berechne, wie viel Euro Timo nun für die Busfahrt weniger bezahlen muss.

   b) Die Klasse besucht ein Museum. Das Einzelticket für Jugendliche kostet 6,50 €.
   Ein Gruppenticket kann von höchstens 20 Jugendlichen genutzt werden und kostet insgesamt nur 105 €. Die Lehrerinnen kommen kostenfrei in das Museum.

   (1) Berechne, wie viel Euro der Eintritt in das Museum für die Klasse insgesamt kostet, wenn die Klasse ein Gruppenticket und zusätzliche Einzeltickets kauft.

   (2) Eine andere Schülergruppe mit 19 Jugendlichen möchte auch in das Museum gehen. Ein Schüler dieser Gruppe meint: „Wir könnten auch das Gruppenticket nehmen. Dann zahlen wir zwar für eine Person mehr, kommen aber trotzdem preisgünstiger in das Museum als mit Einzeltickets“.
   Hat der Schüler recht? Notiere einen Antwortsatz und begründe durch eine Rechnung.

   (3) Ab wie vielen Jugendlichen lohnt sich der Kauf eines Gruppentickets im Vergleich zu Einzeltickets? Notiere einen Antwortsatz.

3. Im Jahr 2016 und im Jahr 2020 wurden jeweils 16 000 Personen gefragt, welche aktuellen gesellschaftlichen Themen ihnen wichtig sind.

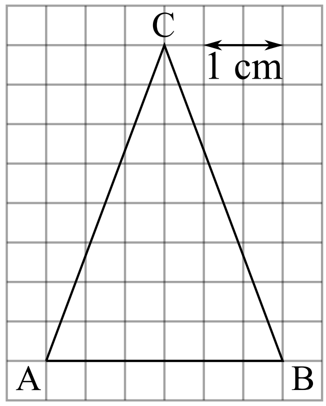
   a) Im Jahr 2020 gab jeder Vierte der Befragten „gesunde Ernährung“ an.
   Bestimme, wie viel Prozent der Befragten das waren.

   b) Im Jahr 2020 gaben 68 % der Befragten „Digitalisierung“ an.
   Berechne, wie viele Befragte das waren.

   c) Im Jahr 2020 gaben 13 000 Befragte „Bildung“ an.
   Berechne, wie viel Prozent der Befragten das waren.

   d) Im Jahr 2016 gaben 8000 Befragte „Umweltschutz“ an.
   Im Jahr 2020 gaben bereits 12 500 Befragte „Umweltschutz“ an.
   Berechne, um wie viel Prozent die Anzahl der Befragten, die „Umweltschutz“ angegeben haben, im Jahr 2020 im Vergleich zum Jahr 2016 gestiegen ist.

4. Abgebildet ist das Dreieck ABC.



a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

b) Welche der folgenden Eigenschaften gelten für das abgebildete Dreieck ABC? Notiere die zutreffenden Eigenschaften auf dein Reinschriftpapier:

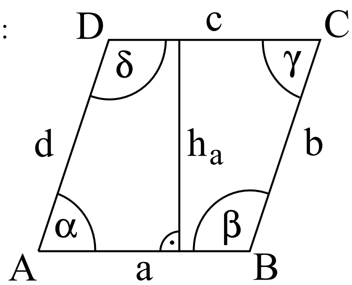
- spitzwinklig
- stumpfwinklig
- rechtwinklig
- gleichschenklig
- gleichseitig

c) Übertrage das Dreieck ABC auf dein Reinschriftpapier.

d) Zeichne alle Höhen in deinem Dreieck ein.

e) (1) Der Punkt A deines Dreiecks auf dem Reinschriftpapier soll die Koordinaten $(-2|-1)$ haben. Zeichne das dazu passende Koordinatensystem mit vollständiger Beschriftung ein.
(2) Notiere die Koordinaten des Punktes C.

5. a) Zeichne das Parallelogramm $ABCD$ mit den folgenden Maßen: $|AB| = a = 5{,}6$ cm, $\beta = 105°$ und $|BC| = b = 3{,}5$ cm.
Beschrifte die Eckpunkte.



b) Ein anderes Parallelogramm $ABCD$ hat einen Flächeninhalt von 28,8 cm^2, eine Höhe $h_a = 6$ cm und einen Winkel $\alpha = 72°$.
(1) Berechne die Länge der Seite a.
(2) Zeichne das Parallelogramm $ABCD$ und beschrifte die Eckpunkte.

c) Ein Parallelogramm hat einen Umfang von 85 cm.
Die Seite a ist 23 cm lang.
Berechne die Länge der Seite b.

6. Löse die folgenden Rätsel. Notiere deine Überlegungen.

a) Nadine ist dreimal so alt wie Tom. Zusammen sind sie 76 Jahre alt.
Gib das Alter von Nadine und Tom an.

b) Ingrid ist im Jahr 1970 geboren und hatte im aktuellen Jahr 2022 bereits Geburtstag; sie ist (zur Zeit) viermal so alt wie Sarah.
Daniela ist 9 Jahre älter als Sarah.
Gib das Alter von Ingrid, Sarah und Daniela im Jahr 2022 an.

c) Nina ist älter als 20 Jahre und jünger als 30 Jahre.
Sie ist 15 Jahre älter als Hanna.
Zusammen sind sie 41 Jahre alt. Gib das Alter von Nina an.

d) Ernie und Bert stehen morgens zur gleichen Uhrzeit auf.
Ernie geht 20 Minuten nach dem Aufstehen 45 Minuten lang joggen.
Bert joggt ab 8:30 Uhr doppelt so lang wie Ernie und ist dann 80 min später als Ernie zuhause.
Um wie viel Uhr sind Ernie und Bert aufgestanden?