MATHEMATIK-WETTBEWERB DES LANDES HESSEN 2022/2023 **2. RUNDE**

AUFGABENGRUPPE A **01.03.2023**

Hinweis: Von allen Teilnehmenden werden jeweils vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

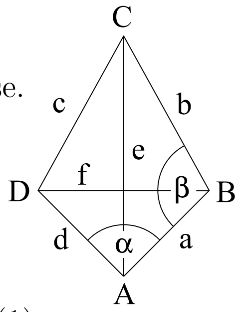
1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

   a) $(x+7)^3 - 125 = 0$

   b) $45x^2 - 45 - 5 \cdot (x^2 + 23) = 0$

   c) $(x^2 - 81) \cdot (x^2 + 18x + 81) \geq 0$

   d) $(x^2 - 9)^2 < 25$



2. a) Konstruiere jeweils ein Drachenviereck $ABCD$ mit $\overline{AC}$ als Symmetrieachse.

   (1) Es ist $e = |AC| = 6$ cm, $f = |BD| = 4$ cm und $\alpha = 90°$.

   (2) Es ist $e = |AC| = 4$ cm, $f = |BD| = 6$ cm und $\alpha = 90°$.

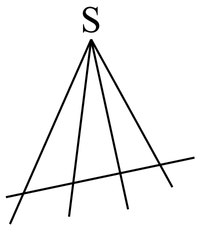
   (3) Es ist $e = |AC| = 6$ cm, $f = |BD| = 4$ cm und $\beta = 90°$.

   b) Begründe, dass bei allen drei Drachenvierecken aus den Aufgabenteilen a) (1), (2) und (3) die Größe des Flächeninhalts jeweils gleich ist und gib diese an.

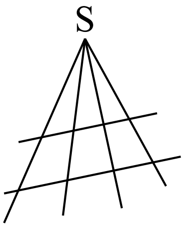
3. a) Vom Punkt S gehen mehrere Strahlen aus. Diese bilden ein Strahlenbüschel, das von einer oder mehreren Geraden geschnitten wird.

   (1) Figur (1) enthält bei 4 Strahlen insgesamt 6 Dreiecke.
   Übertrage die Tabelle und ergänze die fehlenden Werte.

Anzahl Strahlen	2	3	4	5	6	....	
Anzahl Dreiecke			6			....	45



Figur (1)



Figur (2)

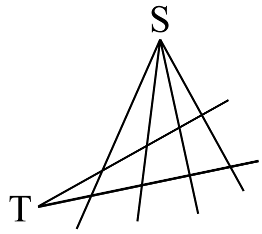
   (2) Wie viele Dreiecke enthält Figur (2)?

   (3) Wie viele Parallelen müssen ein Strahlenbüschel mit vier Strahlen schneiden, damit die entstehende Figur 48 Dreiecke enthält?

   b) Zwei Strahlenbüschel (ausgehend von S und T) schneiden sich.

   (1) Wie viele Dreiecke enthält Figur (3)?

   (2) Zeichne eine Figur mit 2 Strahlenbüscheln, die 18 Dreiecke enthält.



Figur (3)

4. Im Folgenden sind Kraftstoffmenge und Streckenlänge sowie Kraftstoffmenge und Zeit zueinander proportional. Die Geschwindigkeiten sind immer konstant.

   a) Ein Auto verbraucht auf einer Strecke von 100 km bei einer Geschwindigkeit von 120 km/h 5,4 Liter Kraftstoff, bei 75 km/h dagegen nur 4,8 Liter Kraftstoff.

   (1) Wie viel Liter Kraftstoff werden bei 120 km/h in einer Stunde verbraucht?

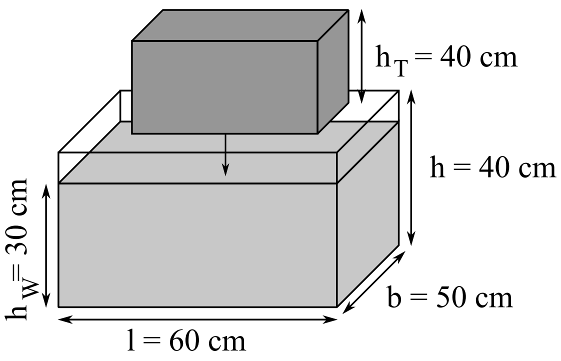
   (2) Wie viel Liter Kraftstoff werden bei 75 km/h in einer Stunde verbraucht?

   b) Ein anderes Auto verbraucht 0,05 Liter Kraftstoff pro Minute bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h. Wie viel Liter Kraftstoff werden dann auf einer Strecke von 100 km verbraucht?

   c) Ein drittes Auto verbraucht 5,4 Liter Kraftstoff auf einer Strecke von 100 km, was einem Verbrauch pro Sekunde von 2 ml entspricht. Welche Geschwindigkeit hat dieses Auto? Runde auf ganze km/h.

5. Ein Aquarium mit der Länge $l = 60$ cm, der Breite $b = 50$ cm und der Höhe $h = 40$ cm (Innenmaße) ist bis zu einer Höhe $h_W = 30$ cm mit Wasser gefüllt.

   a) Wie viel Liter Wasser befinden sich im Aquarium?



   Ein Tauchquader mit der Grundfläche 2000 cm^2 und der Höhe $h_T = 40$ cm berührt gerade noch nicht die Wasseroberfläche. Wenn er ins Wasser eingetaucht wird, verdrängt er die Menge an Wasser, die seinem eingetauchten Volumen entspricht.

   b) Wie viel Liter Wasser würden überlaufen, wenn der Tauchquader bis zum Grund des Aquariums abgesenkt würde?

   c) Der Tauchquader soll so weit abgesenkt werden, dass das Wasser genau bis zum Rand des Aquariums steht.

      (1) Um wie viel cm muss der Tauchquader abgesenkt werden?

      (2) Wie viel Prozent des Tauchquadervolumens sind dann unter Wasser?

   d) Es soll berechnet werden, um welche Höhe x der Wasserspiegel steigt, wenn der Tauchquader um 3 cm abgesenkt wird. Alex schlägt den folgenden Rechenansatz vor:

      $2000 \text{ cm}^2 \cdot (3 \text{ cm} + x) = 60 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} \cdot x$

      Erläutere diesen Ansatz und berechne die Höhe x.

   e) Welche Grundfläche dürfte der Tauchquader höchstens haben, wenn trotz vollständigen Absenkens kein Wasser überlaufen sollte?

6. Jule und Kaja holen sich an jedem Schultag je einen Kakao. Um zu entscheiden, wer bezahlt, werfen sie eine Spielmünze. Bei Wappen zahlt Kaja, bei Zahl zahlt Jule.

   a) Es wird angenommen, dass Wappen und Zahl mit gleicher Wahrscheinlichkeit fallen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

      (1) Jule bezahlt an den beiden nächsten Schultagen.

      (2) Jule bezahlt am übernächsten Schultag.

      (3) Jule bezahlt in den nächsten drei Schultagen zweimal.

      (4) Jule bezahlt in den nächsten fünf Schultagen zweimal.

      (5) Kaja bezahlt in den nächsten fünf Schultagen dreimal.

   b) Nach fünf Schultagen hat Jule fünfmal bezahlt. Jule ist sich sicher, dass Zahl häufiger fällt als Wappen.
      Ihr Mathelehrer schlägt vor, dass die beiden zur Entscheidungsfindung, wer den Kakao bezahlt, die Münze zweimal werfen sollten:

      Fällt im ersten Wurf Wappen und im zweiten Wurf Zahl, bezahlt Kaja.
      Fällt im ersten Wurf Zahl und im zweiten Wurf Wappen, bezahlt Jule.
      Ansonsten wird erneut zweimal geworfen.

      Beurteile, ob sein Vorschlag beiden die gleichen Chancen bietet.

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

AUFGABENGRUPPE B **01.03.2023**

Hinweis: Von allen Teilnehmenden werden jeweils vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

   a) $9x \cdot (x + 5) = 9 \cdot (x^2 - 15)$ b) $5x - 35 > 11x - (9x - 1)$

   c) Bestimme in der Tabelle passende Werte für a, b, c und d.

   d) Finde beide Lösungen der Gleichung: $\frac{x}{8} = \frac{2}{x}$

	x	y	z	$x^2 + y^2 - z^2$
(1)	2	8	10	a
(2)	3	4	b	0
(3)	c	1	d	1

2. a) (1) Zeichne die Punkte $A(-2|0)$, $B(6|0)$, $C(5|3)$ und $D(-1|3)$ in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm ein.

   (2) Spiegele die Punkte C und D an der x-Achse und bezeichne die Bildpunkte mit C' und D'. Gib die Koordinaten von C' und D' an.

   (3) Verbinde die Punkte zu dem Sechseck $AD'C'BCD$.

   b) Berechne den Flächeninhalt des Sechsecks $AD'C'BCD$.

   c) Das Sechseck $AD'C'BCD$ ist achsen- und punktsymmetrisch.

   (1) Markiere im Sechseck $AD'C'BCD$ das Drehzentrum Z der Punktsymmetrie und gib die Koordinaten von Z an.

   (2) Wenn man das Sechseck im Drehzentrum Z um 90° dreht, so bilden alle Punkte und Bildpunkte zusammen ein regelmäßiges Achteck.
   Gib die Anzahl der Symmetrieachsen des entstandenen Achtecks an.

3. Sehnenvielecke sind Vielecke, deren Eckpunkte alle auf einem Kreis, dem *Umkreis*, liegen.

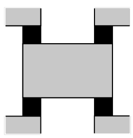
   a) Konstruiere die folgenden Vierecke $ABCD$ und zeichne deren Umkreis.
   Beschrifte die Eckpunkte.

   (1) Rechteck mit $a = |AB| = 8$ cm, $b = |BC| = 6$ cm (2) Quadrat mit Diagonale mit 8 cm

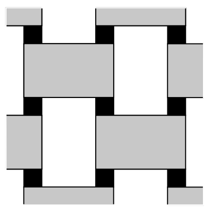
   b) Zeichne drei Kreise mit einem Radius von jeweils $r = 3$ cm. Konstruiere in jedem Kreis eines der nachfolgenden Sehnendreiecke.

   (1) rechtwinkliges Dreieck (2) gleichschenkliges Dreieck (3) gleichseitiges Dreieck

4. Sogenannte „Zentangle“ sind Zeichnungen, die aus Formen mit immer wiederkehrenden Mustern aufgebaut sind. Die hier abgebildeten Muster bestehen aus kleinen schwarzen Quadraten und deckungsgleichen grauen oder weißen Rechtecken. Beim Betrachten der Muster sieht es so aus, als wären graue Bänder (waagerecht) und weiße Bänder (senkrecht) miteinander verflochten und die schwarzen Quadrate bilden kleine quadratische Löcher dazwischen. In Muster Nr. 1 sind jeweils ein vollständiges weißes und ein graues Band zu sehen (ohne die Ränder gezählt), in Nr. 2 sind es vier solche vollständigen Bänder.



Muster Nr. 1



Muster Nr. 2

   a) Übertrage Muster Nr. 2 auf dein Reinschriftpapier. Achte dabei darauf, dass ein kleines schwarzes Quadrat die Größe eines Karokästchens besitzt. Ergänze nach der vorgegebenen Vorschrift zu Muster Nr. 3.

   b) Übertrage die Tabelle auf dein Reinschriftpapier und fülle die Tabelle aus.

Muster Nr.	1	2	5		
Anzahl der Löcher	4	9			256
Anzahl der vollständig abgebildeten Bänder	2	4		16	

   c) Gib für das Muster Nr. n jeweils einen Term an, mit dem man die Anzahl der Bänder sowie die Anzahl der Löcher berechnen kann.

5. Für die Schülerzeitung der Thomas-Reiter-Schule wurden verschiedene Umfragen durchgeführt.

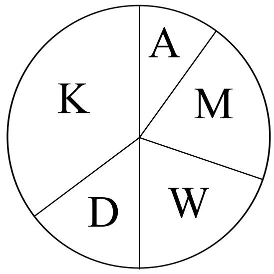
a) Bei der Umfrage zum Thema „Wie kommst du zur Schule?“ erhielt man das folgende Ergebnis:

… mit dem Bus.	… zu Fuß.	… mit dem Fahrrad.	… mit dem Elterntaxi.
40 %	35 %	15 %	10 %

Stelle die Umfrage in einem Streifendiagramm dar.

b) In der Umfrage zum Thema „Schulkiosk“ stimmten 28 % der Jugendlichen dafür, nur noch vegetarische Speisen anzubieten. Doppelt so viele stimmten dafür, dass sowohl vegetarische als auch nichtvegetarische Speisen angeboten werden sollten. Die restlichen 44 Jugendlichen stimmten gegen vegetarische Angebote. Wie viele Jugendliche nahmen an der Umfrage teil?

c) Für die Umfrage zum Thema „Beliebteste Lehrkraft“ wurde ein Kreisdiagramm erstellt. Zur Auswahl standen Frau Abel (A), Herr Doll (D), Frau Karl (K), Herr Muck (M) und Frau Wenz (W). Für Herrn Muck und Frau Wenz stimmten jeweils 48 Jugendliche. Frau Abel erhielt halb so viele Stimmen. Zusammen erhielten Frau Abel, Herr Muck und Frau Wenz genau die Hälfte der abgegebenen Stimmen. Der Sektor D hat einen Winkel von 54°. Wie viele Jugendliche stimmten für Frau Karl?



d) Bei der Umfrage zum Thema „Schulkleidung“ mussten zwei Fragen entweder mit „ja“ oder mit „nein“ beantwortet werden. 20 % aller Befragten beantworteten die erste Frage mit „ja“. Von diesen 20 % beantworteten 60 % auch die zweite Frage mit „ja“. Berechne, wie viel Prozent aller Befragten beide Fragen mit „ja“ beantworteten.

6. Ein Unternehmen möchte stylische T-Shirts herausgeben, auf denen Städtenamen oder beliebige andere Begriffe wie in der nebenstehenden Abbildung aufgedruckt sind.
Beispielstadt: ERBACH

a) Die Buchstaben des Wortes „RUESSELSHEIM“ soll zeilenweise so angeordnet werden, dass in jeder Zeile die gleiche Anzahl von Buchstaben steht.

(1) Gib alle unterschiedlichen Möglichkeiten an.

(2) Auch andere Städte, deren Wortlängen mehr als 12 Buchstaben haben, möchten solch ein T-Shirt drucken. Wie viele Buchstaben müsste der Name der Stadt haben, damit es die gleiche Anzahl der Möglichkeiten wie bei „RUESSELSHEIM“ gibt?

(3) Willi behauptet: „Würde die Stadt „BADSCHWALBACH“ solche T-Shirts drucken wollen, gäbe es noch mehr Möglichkeiten für die Anordnung.“ Hat Willi recht? Begründe.

(4) Wie viele Buchstaben dürfte der Name einer Stadt haben, dass es genau zwei Möglichkeiten für die Anordnung gibt? Notiere alle Wortlängen bis maximal 20 Buchstaben.

b) Die Aufschriften können auch stufig angeordnet werden, sodass in jeder weiteren Zeile die Anzahl der Buchstaben gleichmäßig ansteigt.

(1) Für ein Jubiläum des Mathematikwettbewerbs könnten T-Shirts mit der Aufschrift „WINKELMESSER“ bedruckt werden. Dabei soll die Aufschrift 3-stufig angeordnet werden. Gib alle drei Möglichkeiten an.

(2) Frau Dr. Hartwich träumt davon, für die Kreissieger ein T-Shirt drucken zu lassen mit der Aufschrift „MATHEMATIKWETTBEWERB“. Aus wie vielen Stufen würde hier der Aufdruck bestehen, wenn die Buchstaben gleichmäßig ansteigen und mehr als 2-stufig sein sollen? Gib eine Möglichkeit an.

AUFGABENGRUPPE C — **01.03.2023**

Hinweis: Von allen Teilnehmenden werden jeweils vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Berechne für $x = 8$ und $y = 15$ den Wert des Terms $7x - 4y$.

   b) Berechne x.

   (1) $4x - 12 = 44$

   (2) $8x - 15 = 6x + 20$

   (3) $-9x - 18 + 25x + 24 = 38$

2. An einer Käsetheke werden Käsesorten zu den angegebenen Preisen verkauft.

Käsesorten	Preis pro 1000 g
Emmentaler	12 €
Bergkäse	16 €
Gouda	15 €

   a) Für einen Auflauf benötigt man für 4 Personen 500 g Emmentaler. Nadine möchte diesen Auflauf für 6 Personen zubereiten und kauft den benötigten Emmentaler an dieser Käsetheke. Berechne, wie viel Euro Nadine für den Emmentaler bezahlen muss.

   b) Toni kauft 800 g Käse. Davon sind $\frac{3}{5}$ Bergkäse, der Rest ist Gouda. Berechne, wie viel Gramm Gouda Toni kauft.

   c) Frau Jäger hat an der Käsetheke für Emmentaler und Gouda insgesamt 18 € bezahlt. Gib an, wie viel Gramm Emmentaler und wie viel Gramm Gouda Frau Jäger gekauft haben kann. Notiere eine Möglichkeit.

3. Timo trainiert für einen Halbmarathonlauf. Ein Halbmarathon hat eine Länge von 21 000 m. Die abgebildete Tabelle zeigt die Längen von Timos Laufstrecken an drei Tagen der vergangenen Trainingswoche.

Montag	Dienstag	Mittwoch
6400 m	8800 m	14 000 m

   a) Berechne, wie viel Prozent Timos Laufstrecke am Dienstag länger war als am Montag.

   b) Am Mittwoch wollte Timo eine sehr lange Strecke laufen. Er musste seinen Trainingslauf aber schon nach 14 000 m abbrechen. Mit dieser Länge erreichte er 70 % seiner geplanten Streckenlänge. Berechne, welche Streckenlänge Timo am Mittwoch eigentlich laufen wollte.

   c) Timo behauptet: „An den drei Tagen von Montag bis Mittwoch bin ich im Durchschnitt genau 50 % der Halbmarathonstrecke gelaufen.“ Hat Timo recht? Notiere einen Antwortsatz und begründe deine Antwort rechnerisch.

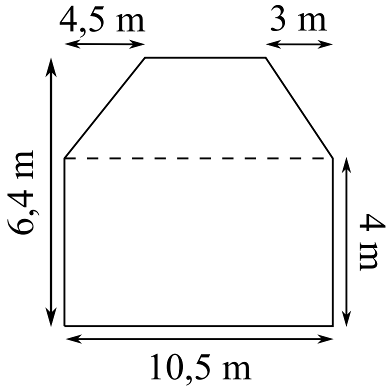
4. a) Konstruiere jeweils das Parallelogramm $ABCD$ mit den folgenden Angaben. Beschrifte die Eckpunkte.

   (1) $|AB| = a = 5{,}5$ cm, $\alpha = 60°$ und Flächeninhalt $A = 22$ cm^2
   Berechne zunächst die Höhe h_a.

   (2) $|AB| = a = 6{,}5$ cm, $\beta = 55°$ und Umfang $U = 21{,}6$ cm
   Berechne zunächst die Länge der Seite b.

   b) In einem anderen Parallelogramm $ABCD$ ist der Winkel $\alpha = 113°$ groß.
   Berechne die Größe des Winkels β.

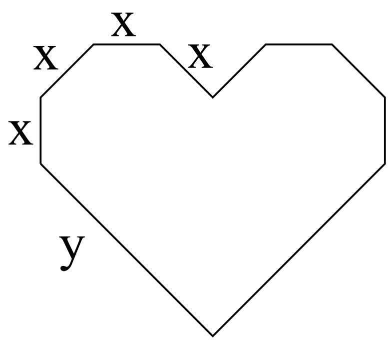
5. Die Abbildung (nicht maßstabsgerecht) zeigt den Grundriss der Terrasse von Familie Paul. Die Fläche der Terrasse setzt sich aus einem Rechteck und einem Trapez zusammen.



   a) Familie Paul möchte die Terrasse neu pflastern. Ein Quadratmeter der neuen Pflastersteine kostet 42 €. Berechne, wie viel Euro Familie Paul für die neuen Pflastersteine der Terrasse bezahlen muss.

   b) Herr Paul behauptet: „Unsere Terrasse ist achsensymmetrisch.“ Hat er recht? Begründe deine Antwort.

6. Im Arbeitslehreunterricht wird aus einem Stück Draht ein Schlüsselanhänger gebogen. Der Schlüsselanhänger soll die Form eines achsensymmetrischen Herzens haben. Die Abbildung zeigt die Form des Schlüsselanhängers mit den Seitenlängen x und y.



   a) Sandra wählt für $x = 1{,}5$ cm und $y = 5$ cm. Berechne die Gesamtlänge ihres Drahtes.

   b) Ali hat insgesamt 15 cm Draht, den er für den Schlüsselanhänger vollständig verbrauchen möchte. Er wählt für die Seite y eine Länge von 4,3 cm.
   Berechne, wie lang dann die Seite x sein muss.

   c) Toby hat einen Draht mit der Gesamtlänge von 19,8 cm und möchte diesen vollständig verbrauchen. Er möchte, dass die Seitenlänge y fünfmal so lang ist wie die Seitenlänge x.
   Berechne die Seitenlängen x und y seines Schlüsselanhängers.

   d) Stelle einen Term mit x und y auf, mit dem man die Gesamtlänge des Drahtes für den Schlüsselanhänger bestimmen kann. Fasse den Term so weit wie möglich zusammen.